

PETER BAIREUTHER

Topologie

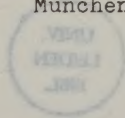
im Mathematikunterricht
der Kollegstufe

1977

Topologie
im Mathematikunterricht
der Kollegstufe

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von Peter Baireuther
aus Schwäbisch Gmünd

eingereicht im Sommer 1974



1. Referent: Professor Kasch
Korreferent: Professor Seebach

Tag der mündlichen Prüfung: 28. November 1977

Inhalt

I	Zusammenfassung	S. 2
II	Didaktische Prämissen	6
II.1	Bedingungen für den Mathematikunterricht in der Kollegstufe	7
II.2	Topologie als Unterrichtsstoff in der Kollegstufe	16
III	Ein Topologie-Lehrgang für die Kollegstufe ...	20
III.1	Die Entstehung des Lehrganges	20
III.2	Erläuterungen	22
III.3	Der Lehrgang	29
IV	Methodische Hinweise	238
IV.1	Einige Bemerkungen zur Unterrichts= organisation	239
IV.2	5 Unterrichtseinheiten	242
IV.3	16 Arbeitskarten	274
	Literaturverzeichnis	293

I Zusammenfassung

In den Lehrplänen für die verschiedenen Schulstufen in der Bundesrepublik Deutschland ist die Topologie bisher nur durch Elemente der anschaulichen Topologie ("Gummihaut-Geometrie"), die in der Grundschule und der Sekundarstufe I behandelt werden, vertreten. Die mengentheoretische Topologie dagegen hat noch keinen Eingang in den Mathematikunterricht gefunden und stand dafür wohl auch kaum zur Diskussion, da dies brauchbare Ansätze zur didaktischen Aufbereitung dieses Gebietes voraussetzen würde. Versuche dazu wurden bisher aber nur mit dem Ziel unternommen, den Zugang zur Analysis durch topologische Begriffe zu vereinfachen. Eine eigenständige Rolle der Topologie als Unterrichtsgegenstand wird dabei fast durchweg nicht erwogen.

Der daraus resultierende Eindruck, dass die überwiegende Mehrzahl der Didaktiker die Topologie nicht für einen relevanten Gegenstand der Schulmathematik hält, kann allerdings nur durch mündliche Äußerungen belegt werden. Die folgenden Gründe dürften dafür ausschlaggebend sein:

- 1) Das Abstraktionsniveau schon der Grundlagen der Topologie ist sehr hoch.
- 2) Es gibt zwar einen eindeutigen Anwendungsbezug der Topologie zur Analysis, der notwendige theoretische Aufwand scheint aber durch die Ergebnisse (für die Schule) nicht gerechtfertigt zu sein.
- 3) Alternativen zum üblichen rein axiomatischen und deduktiven Aufbau der Topologie bieten sich nicht ohne weiteres an.

Eine gewisse Rolle mag auch der geringe Grad an Popularität der Topologie (verglichen mit Gebieten wie Geometrie, Algebra und Informatik) spielen.

Natürlich kann man postulieren, jeder einigermaßen elementare mathematische Sachverhalt könne durch Verringerung der Anforderungen und Vermehrung der Beispiele für den Schulunterricht zugänglich gemacht werden¹). Die oben angeführten Argumente können dadurch aber nicht entkräftet werden, da eine solche Transformation von Hochschulmathematik auf Schulniveau stufenspezifische Merkmale des Mathematikunterrichts nur unzureichend berücksichtigt.

Im Gegensatz dazu gibt die vorliegende Arbeit auf alle Gegenargumente eine konstruktive Antwort:

- 1) Der zugegebenermaßen hohe Abstraktionsgrad ermöglicht gerade die Demonstration mehrerer Abstraktionsvorgänge, die alle von den Schülern selbst erarbeitet werden können. Er gestattet darüber hinaus einfache graphische Veranschaulichungen, sodass häufig - ohne Verlust an Exaktheit - sehr anschaulich argumentiert werden kann.
- 2) Die Topologie ist primär selbst Anwendungsgebiet für die Mengenalgebra. Sie ist nicht darauf angewiesen, ihre Motivation von den Anwendungsmöglichkeiten in der Analysis zu beziehen, da es in der Topologie selbst genügend ansprechende Aufgabenstellungen gibt. Die Wechselwirkungen zur Analysis und zur Geometrie dienen vielmehr dazu, die Topologie als mathematische Grundstruktur auszuweisen.
- 3) Es gibt eine klare didaktische Alternative zu der axiomatischen und deduktiven Behandlung der Topologie in Lehre und Literatur: das mathematisierende Verfahren, das mathematische Begriffe aus mathematischen Problemstellungen zwingend ableitet und so der Analyse die Konstruktion und die Anwendung voransetzt. Dieser für die Topologie neue didaktische Ansatz lässt sich für einen repräsentativen Katalog von Grundbegriffen realisieren.

¹) Papy zeigt (s. (28)), dass dies auch für die Topologie möglich ist; er konfrontiert sogar schon 12-jährige Schüler mit topologischen Begriffen.

Dieses Verfahren, das weitgehend mit der genetischen Methode im Sinne von Wittmann übereinstimmt, ist die Grundlage für die Konstruktion des angegebenen Lehrganges. Als Konsequenz ergeben sich Begriffsbildungen, die ⁱⁿ ihrer Sequenz und teilweise auch in ihrer Formulierung von den in der allgemein üblichen Lehre tradierten Konventionen abweichen. Darüber hinaus liefert der mathematisierende und axiomatisierende Ansatz noch weitere Argumente für die Eignung der Topologie für den Mathematikunterricht der Kollegstufe:

- 4) Er gestattet die Realisierung einer ganzen Reihe stufen= gerechter didaktischer und methodischer Prinzipien, ins= besondere einen durchgehend problemorientierten Unterricht.
- 5) Der Stoff kann von den Schülern weitgehend selbständig er= arbeitet werden.

Zur Begründung dieser Thesen wird ein Lehrgang vorgelegt, der so detailliert ausgearbeitet ist, dass er unmittelbar in die Unterrichtspraxis umgesetzt werden kann. Dadurch soll eine kritische Überprüfung durch eine vielfältige Erprobung im Unterricht ermöglicht werden.

Diese Konzeption impliziert allerdings, dass in dem Lehrgang neben den neuen didaktischen Ansätzen auch solche Überlegungen ausführlich dargestellt werden, die einem Leser, der über Vorkenntnisse in der Topologie verfügt, völlig vertraut sind. Darüber hinaus enthält der Lehrgang didaktische Begründungen der Stoffauswahl und -anordnung sowie Anregungen zur unter= richtlichen Gestaltung, die allerdings in der Regel recht knapp gehalten und häufig nur durch die Formulierung der zu vollziehenden Gedankengänge angedeutet sind; in einem Anhang sind sie für einige Unterrichtseinheiten exemplarisch aus= führlicher beschrieben. In gleicher Weise sollen die einge= streuten Übungsaufgaben zeigen, dass die Topologie ein genü= gendes Angebot variabler Problemstellungen anzubieten gestat= tet, ohne dass hier Vollständigkeit angestrebt wäre.

Das vorgelegte Curriculum präzisiert die inhaltlich angestreb= ten Lernziele vor allem durch die ausführliche Schilderung des Stoffes. In einem Vorspann werden einige übergreifende Lern= ziele angegeben, die dann Grundlage für den Lehrgang sind. Es ist dabei nicht angestrebt, eine vollständige Analyse des ak=

tuellen Standes der Lernzieldiskussion zu geben, vielmehr wird vor dem Hintergrund einer durch persönliche Erfahrungen des Autors geprägten Charakterisierung des traditionellen Unterrichts an Gymnasien ein knappes didaktisches Axiomensystem entwickelt, das naturgemäss den Standpunkt des Autors widerspiegelt und das mathematisierende Verfahren begründet und erläutert.

Der vorgelegte Entwurf eines Curriculums für Topologie in der Kollegstufe stützt sich auf verschiedene Unterrichtsversuche in Gymnasien und Pädagogischen Hochschulen. Die Erfahrungen aus diesen Versuchen schlugen sich in mehreren Revisionen in der Konzeption und der Durchführung des Lehrganges nieder; sie erschienen jedoch aufgrund der geringen Teilnehmerzahlen zu wenig repräsentativ und wegen der fehlenden Vergleichsmöglichkeiten mit der Organisationsform von Wahl- und Leistungskursen in der Kollegstufe zu wenig exakt abgesichert, um im Einzelnen in der Arbeit wiedergegeben zu werden.

Der Dank für die Anregung dieser Dissertation gilt Herrn Prof. Dr. F. Kasch, der sich als Fachwissenschaftler nicht scheute, die Mühe der Betreuung einer didaktischen Arbeit auf sich zu nehmen. Er und Herr Prof. Dr. K. Seebach haben mir durch ihre kritischen Anregungen sehr geholfen. Zum Zustandekommen der Arbeit haben auch die Teilnehmer der begleitenden Kurse beigetragen, die durch ihr freiwilliges Engagement und ihre eifrige Mitarbeit die unerlässliche Verbindung zur Schulpraxis herzustellen halfen. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

II. Didaktische Prämissen

Es gibt derzeit kein allgemein anerkanntes vollständiges Gerüst didaktischer Regeln, denen jeder Vorschlag zur Didaktik der Mathematik notwendig folgen müsste. Zu wichtigen Grundfragen - z.B. des adäquaten Abstraktionsgrades - streuen die Meinungen oft über ein sehr breites Spektrum. Dies ist insbesondere deshalb zum augenblicklichen Zeitpunkt so auffallend, weil die didaktische Diskussion innerhalb der letzten 20 Jahre (zumindest an Umfang) einen ungeheuren Aufschwung genommen hat, während die Kriterien zur Bewertung didaktischer Beiträge noch keineswegs so abgesichert sind wie in klassischen Wissenschaften. Eine auch nur annähernd vollständige Analyse dieser Diskussion ist im Rahmen dieser Arbeit selbstverständlich nicht beabsichtigt und auch nicht möglich¹⁾, andererseits konnte sie auch nicht in einen leeren Bezugsrahmen gestellt werden. Im Folgenden wird deshalb zunächst die didaktische Position des Autors entwickelt, die dann Grundlage für den vorgeschlagenen Lehrgang sein wird. Auf der Basis der aktuellen Situation des gymnasialen Mathematikunterrichts (wie sie sich aus der Sicht des Autors darbietet) werden einige mögliche Lern- und Bildungsziele des Mathematikunterrichts der Kollegstufe angegeben und auf ihre Konsequenzen bezüglich Stoffauswahl und Unterrichtsgestaltung hin untersucht.

¹⁾ siehe dazu Lenné, Literaturverzeichnis Nr. (47)

II.1 Bedingungen für den Mathematikunterricht in der Kollegstufe.

a) Merkmale des gegenwärtigen Mathematikunterrichts an Gymnasien

Mathematik ist derzeit in sämtlichen Klassen des Gymnasiums für alle Schüler verbindliches Unterrichtsfach. Daraus erwächst die Schwierigkeit, die Vermittlung von Mathematik auch auf solche Schüler abzustimmen, deren Fähigkeit, mathematische Denkprozesse zu vollziehen bzw. zu reproduzieren, nicht in der gewünschten Masse entwickelt ist. Das hat - überspitzt ausgedrückt - weitgehend dazu geführt, den Schüler vor solchen Denkprozessen zu verschonen und ihm im Unterricht die Rolle eines zu programmierenden "Rechenautomaten" zuzumuten, der eine Fülle von Aufgaben nach vom Lehrer vorgegebenen Algorithmen zu lösen imstande ist, den inneren Zusammenhang verschiedener Aufgabentypen aber nur in Ausnahmefällen durchschaut. Selbst bei positiver Abweichung von diesem bewusst überzeichneten Bild lässt die traditionelle Strukturierung des Mathematikunterrichts nach Aufgabentypen ("Aufgabendidaktik") nur schwer echte Mathematik im Mathematikunterricht zu. Auf diese Weise kommt nun ein bedenklicher Kreisprozess in Gang: Die vermeintliche Rücksichtnahme auf schwächer begabte Schüler verdrängt mathematische Denkvorgänge aus dem Unterricht; die mangelnde Übung wiederum verhindert eine Förderung mathematischer Denkfähigkeit zum Teil auch bei durchaus begabten Schülern. Aus dieser Sicht wird auch ein Teil der in der Regel sehr grossen Schwierigkeiten verständlich, mit denen Mathematikstudenten in den ersten Semestern zu kämpfen haben.

Ein weiterer wichtiger Aspekt traditioneller Mathematik=didaktik, die zum grossen Teil noch den Unterricht an Gymnasien bestimmt, ist die aussermathematische Motivation ("Lebensnähe") mathematischer Probleme. Der damit zweifel=los angestrebte Transfer auf aussererschulische Lebenssitua=tionen ist wahrscheinlich durchaus möglich, soweit es sich um die Vermittlung der grundlegenden "Kulturtechniken" han=delt (auch wenn dies von neueren Strömungen der Didaktik unter Hinweis auf die zunehmende Automatisierung häufig angezweifelt wird). Spätestens aber mit Beginn der Sekundar=stufe II wird diese Motivation weitgehend zu einer Leerfor=mel, denn nur ausserordentlich wenige Aufgabenstellungen der relevanten mathematischen Gebiete sind wirklich lebens=nah genug, um von daher das Interesse der Schüler zu wecken. Wo dann keine anderen Motivationsmöglichkeiten (etwa in der Person des Lehrers) gegeben sind, verliert der Mathematik=unterricht für einen Teil der Schüler jeglichen Sinn.

In Folge der Reformierung der gymnasialen Oberstufe, die in erster Linie eine Verbesserung der Studienvorberei=tung ermöglichen sollte, kann man nun in zunehmendem Masse ein Vordringen der an Hochschulen üblichen deduzierende Me=thode in den Unterricht der Kollegstufe beobachten. Diese Methode ist charakterisiert durch

"Streben nach möglichst eleganter und systematischer Dar=stellung fertiger Resultate, explizite und präzise Begriffs=erklärung, passende Wahl von Definitionen und Axiomen, sorg=fältige Bereitstellung von später benötigten Mitteln..., Beseitigung unnötiger Voraussetzungen, Streben nach möglichst grosser Allgemeinheit, knappe innermathematische Motivation (wenn überhaupt), Beschränkung auf mathematische Aspekte, Isolierung der Mathematik von ihren Anwendungen" (nach (51) S. 118).

Es ist zu befürchten, dass durch eine solche Imitation des Vorlesungsstiles keineswegs eine bessere Vorbereitung auf ein späteres Studium (auch der Mathematik) erreicht werden kann, Vielmehr dürften dadurch die bekannten Schwierigkeiten von Studienanfängern gerade im Fach Mathematik nur zeitlich nach vorne verlegt, auf einen erweiterten Personenkreis ausge=dehnt und durch die heterogene Zusammensetzung der Schul=klassen potenziert werden.

Ein besonders scharfer Kritiker der Anwendung der deduktiven Methode auf den Schulunterricht ist Freudenthal: Er beschreibt die Mathematik, die auf diese Weise dem Schüler vermittelt wird, als "präfabriziert vom erwachsenen Mathematiker, der weiss, wie die Teile ineinander passen sollen, und wofür jeder einzelne dient, aber ein wesentlicher Haufen isolierter Bausteine für den Schüler, dem diese esoterische Wissenschaft verborgen bleibt...

...Der Lernprozess kennt eine Stufung. Auf der höheren Stufe wird das, was auf der niederen eine Tätigkeit war, Objekt der Analyse. Der Schüler lernt mathematisch ordnen, seine instinktiven Tätigkeiten mathematisieren. Wenigstens das wäre wünschenswert. In der Praxis hat der Lehrer schon für ihn alles geordnet. Statt zu mathematisieren, lernt der Schüler fertige Mathematik, die er, wenn es darauf ankommt, nicht anwenden kann, denn er hat ja nie am eigenen Leibe erfahren, dass und wie man zu einem nicht mathematischen Problem die Mathematik erschafft, mit der man es schafft...und einen mathematischen Stoff erneut auf höherer Stufe der mathematischen Ordnung unterwirft" (s. (42)).

b) Mathematisieren im Mathematikunterricht der Kollegstufe

Wittmann¹⁾ stellt der deduzierenden Methode und der Aufgabendidaktik die genetische Methode gegenüber. Er versteht darunter die Auswahl von Inhalten, die in sich, zu anderen Inhalten und zur Wirklichkeit vielfältige Bezüge aufweisen, die Problemorientierung des Unterrichtes, den kontinuierlichen Anschluss weiterer Fragestellungen, die immer an das Vorverständnis der Schüler gebunden sind. Er wie auch andere Didaktiker, die die genetische Methode vertreten (sie wurde von F. Klein und O. Toeplitz angeregt und von Freudenthal, Wittenberg und Wagenschein neu formuliert), betonen vor allem den Wert des Mathematisierens. Dieser Begriff beinhaltet - wiederum nach Wittmann (51, S. 116/117):
a) Die Schaffung und Weiterentwicklung mathematischer Instrumente in der Auseinandersetzung mit neu aufgetauch-

¹⁾ s. (51) S. 118 - 120)

ten Problemen der Wirklichkeit oder der Mathematik. Das neue Instrumentarium kann dabei zunächst noch stark konkrete Züge tragen und in der Terminologie stark auf die zu lösenden Probleme zugeschnitten sein. Begriffsbildungen haben noch nicht unbedingt allen mathematischen Exaktheitsansprüchen zu genügen.

- b) Die Reflexion der neuen Begriffe findet erst nach ihrer Konstruktion statt. Dieses Stadium des Lernprozesses nennt Wittmann die begrifflich-strukturelle Analyse. Dabei rückt die Betrachtung der Ausgangsprobleme in den Hintergrund. Im Mittelpunkt steht die Ordnung und exakte Beschreibung des zuvor erarbeiteten Instrumentariums.
- c) Die neu entwickelten Begriffe und Verfahren werden dann zur Untersuchung spezieller Probleme in vertrauten oder neuen Bereichen verwendet. Das kann Ausgangspunkt eines neuen Mathematisierungsprozesses sein.

Dieses mathematisierende Verfahren kommt dem natürlichen Ablauf eines Lernprozesses entgegen und entspricht daher der Realisierung einer ganzen Reihe didaktischer und methodischer Prinzipien. Neben dem genetischen Prinzip, das mit der Forderung nach einem mathematisierenden Unterricht fast identifiziert werden kann, seien hier exemplarisch nur genannt:

- 1) Das Aufbauprinzip, nach dem der Analyse von Begriffen deren Konstruktion und Anwendung voranzugehen hat.
- 2) Das Redundanzprinzip: Die Einbettung neuer Sachverhalte in bekannte Bezüge ergibt sich ganz von selbst aus der Konstruktion neuer Begriffe aus Problemstellungen, die sich bei der Untersuchung des bereits erarbeiteten Begriffsgefüges ergeben.

Darüber hinaus lässt die durchgehende Problemorientierung des Unterrichts erwarten, dass die so erreichten Ziele weniger leicht vergessen werden und möglicherweise auch in neuen Zusammenhängen angewendet werden können.

Das Verfahren ist auch typisch für weite Bereiche der mathematischen Forschung, wo ja auch nicht deduzierend von (nicht bekannten!) Ergebnissen aus der Weg zu diesen Er=

gebissen erschlossen werden kann, sondern ebenso heuristische Methoden verwendet, Begriffe provisorisch formuliert und wieder revidiert werden, bis sich ein überzeugendes Ganzes ergeben hat. Mathematische Forschung kann also zu einem guten Teil als Mathematisieren mathematischer (und nichtmathematischer) Problemstellungen charakterisiert werden. Die Übertragung dieses Prinzips auf den Unterricht ermöglicht daher ein Verständnis für die Entwicklung eines mathematischen Gebietes. Dass damit nicht eine exakte Schilderung des historischen Ablaufes gemeint sein kann, versteht sich von selbst.

In der Kollegstufe wird man allerdings nicht durchgehend reale Umweltprobleme mathematisieren können. Für die in dieser Stufe relevanten mathematischen Gebiete bieten sich nur wenige wirklichkeitsgetreue Sachbezüge an, die einerseits das angestrebte mathematische Instrumentarium in vertretbar vielen Schritten konstruieren lassen und andererseits nicht durch den notwendigen Rechenaufwand die mathematische Struktur vollständig zudecken (dies ist etwa das Hauptproblem bei Versuchen, Statistik in der Kollegstufe zu betreiben). Man kann sich daher ohne Verstoß gegen das genetische Prinzip von innermathematischen Problemstellungen leiten lassen. Dies bietet sich vor allem bei solchen mathematischen Gebieten an, die stark strukturorientiert sind. Bei diesen Stoffen kann man wohl vor allem dann auf Interesse der Schüler rechnen, wenn man ihnen nicht erst am Ende des Lehrganges verrät, wozu das Ganze gut war.

Mathematisierender Unterricht schliesst weiterhin deduzierendes Vorgehen nicht völlig aus. Bei Beweisführungen, die sich an die begrifflich-strukturelle Analyse anschliessen, wird man ganz selbstverständlich oft deduzierend argumentieren. Das ist umso leichter möglich, als man ja jetzt mit weitgehend verinnerlichten Begriffen und nicht nur mit formalen Sprechweisen hantieren kann. Die Hoffnung ist daher nicht unbegründet, dass gerade ein Unterricht, der sich nicht an den Methoden der Hochschulmathematik orientiert, besonders gut auf gerade diese Methoden vorbereiten kann, da bei genügend Erfahrung in der Konstruktion formaler Systeme wohl auch akzeptiert werden kann, wenn diese Systeme

me als fertige Gebilde vorgestellt werden. In Bezug auf eine sinnvolle Studienvorbereitung dürfte sich daher ein verstärkt mathematisierender Mathematikunterricht wohl als erfolgreicher erweisen als die traditionelle Aufgabendidaktik, die hier wohl schlicht versagt hat. Die grosse Diskrepanz zwischen Schul- und Hochschulunterricht, die in Mathematik besonders augenfällig war, war doch der Hauptgrund für die Einführung der Kollegstufe, die durch Spezialisierung eine gezielte Studienvorbereitung ermöglichen soll. Es ist jedoch zu befürchten, dass dieses Ziel gerade nicht erreicht werden kann, wenn Inhalte der Hochschulmathematik nun in die Kollegstufe vorverlegt werden, ohne entsprechend völlig neu und in für die Schule geeigneter Form aufbereitet zu werden.

c) Ziele des Mathematikunterrichts in der Kollegstufe

Die Vorbereitung auf ein späteres Fachstudium ist sicher das einzige unumstrittene Ziel des Kollegstufenunterrichts. Will man jedoch Mathematikunterricht auch für solche Schüler rechtfertigen, die nicht beabsichtigen, Mathematik oder ein naturwissenschaftliches Fach zu studieren, so wird man darüber hinaus noch weitere Ziele angeben müssen, die durch Mathematikunterricht angestrebt bzw. erreicht werden können. Da es jedoch kaum wissenschaftlich tragfähige Untersuchungen über die Korrespondenz von Fächern bzw. Einzelstoffen mit allgemeinen Bildungszielen gibt, bleibt man - abgesehen von inhaltlichen Lernzielen - meist auf Vermutungen angewiesen.

Akzeptiert man als zentrales Ziel des Mathematikunterrichtes, dass er ein realistisches Bild der Wissenschaft Mathematik vermitteln soll, so kann man aus den verschiedenen Aspekten dieser Wissenschaft, die ja Ausdruck des menschlichen Wesens ist (wie jede andere Schöpfung des menschlichen Geistes), akzeptierbare Bildungsziele des Mathematikunterrichts ableiten.

Nach einer selbstverständlich vergrößernden Übersicht von Winter¹⁾ sind die wesentlichen Aspekte der Mathematik die folgenden:

- 1) Mathematik als schöpferische Wissenschaft als Ausdruck des Menschen als schöpferisches und spielendes Wesen. Bei Betonung dieses Aspektes (entdeckendes Lernen durch Mathematisieren!) besteht Aussicht, dass heuristische Strategien geübt und verinnerlicht werden.
- 2) Mathematik als beweisende, deduzierende Wissenschaft entspricht dem Menschen als nachdenkendem und nach Begründungen suchendem Wesen. Als Ziel des Mathematikunterrichts hierzu kann die Fähigkeit, Beweise zu führen und als allgemeines Ziel die Fähigkeit zu rationalem Argumentieren genannt werden. Eine klare Kenntnis logischer Regeln und ihrer Anwendungsmöglichkeiten mag sicherlich dazu beitragen können, manche Diskussion auch unter Nichtmathematikern zu versachlichen.
- 3) Mathematik als anwendbare Wissenschaft entspricht dem wirtschaftenden und mit Technik umgehenden Menschen. Da die Anwendung mathematischer Techniken dann besonders effektiv ist, wenn die Konstruktion solcher Instrumente zumindest an einigen Beispielen selbst vollzogen wurde, wird man als Ziel des Mathematikunterrichtes die Fähigkeit zu Mathematisieren sehen. Das übergreifende Ziel beschreibt Winter als "Förderung des Verständnisses für Wirklichkeit und ihre Nutzung".
- 4) Dem Menschen als sprechendes Wesen steht die formale Wissenschaft Mathematik gegenüber. Tatsächlich steht in der Mathematik ein besonders leicht zu überschauen= des Beispiel für die Entwicklung einer problemgerechten Sprache und Symbolik zur Verfügung, sodass es möglich scheint, grundsätzlich Verständnis für einen solchen Vorgang wecken zu können, wenn man es vermeidet, in einen blossen Formalismus abzugleiten. Zur formalen Wissenschaft gehören die Ziele Formalisieren und Anwendung von Fertigkeiten, die allerdings Ergebnis eines Formalisierungsvorganges sein müssen.

¹⁾ s. (53) S. 116

Die angegebene Liste von Zielen des Mathematikunterrichts, die keineswegs nur für die Kollegstufe Gültigkeit haben, ist sicherlich nicht vollständig. Eine solche vollständige Liste ist aus bereits genannten Gründen auch gar nicht möglich. Es sei statt dessen auf die grosse Schwierigkeit hingewiesen, die der Didaktik der Mathematik daraus erwächst, dass ein solches tragfähiges Fundament für inhaltliche Innovationen zur Zeit nur in Ansätzen vorhanden ist.

d) Folgerungen für den Mathematikunterricht
in der Kollegstufe

Aus dem bisher Gesagten ergeben sich die folgenden Forderungen, die der Mathematikunterricht in der Kollegstufe berücksichtigen sollte. Sie bilden das didaktische "Axiomensystem", nach dem der vorgeschlagene Kurs in Topologie konstruiert ist:

- 1) Mathematikunterricht in der Schule kann nicht ohne Motivation auskommen. An die Stelle der Motivation durch geeignete (aussermathematische) Anwendungen wird in der Kollegstufe jedoch weitgehend die Sachmotivation durch interessante mathematische Problemstellungen treten müssen (das trifft selbstverständlich, wenn auch möglicherweise in geringerem Umfang, auch schon für frühere Schulstufen zu).
- 2) Bei der derzeit gegebenen mathematischen Vorbildung der Schüler der Kollegstufe scheidet ein rein axiomatisches und deduzierendes Vorgehen aus. Ein nicht ausreichend vorbereitetes Axiomensystem hat keine motivierende Wirkung¹⁾. Zumindest die grundlegenden Axiome einer mathematischen Theorie, die in der Schule behandelt werden soll, müssen deshalb schon a priori den Schülern als vernünftige Forderungen bewusst gemacht werden.

¹⁾ Eine ausführlichere Begründung dafür ist u.a. aus (42), (46) und (50) zu entnehmen.

- 3) Eine Behandlung mathematischer Strukturen unter Ausklammerung der zugehörigen Axiomensysteme ist undenkbar. Ihre Begründung bietet vielmehr Gelegenheit, Einblick in das Zustandekommen und die Eigenschaften eines Axiomensystemes zu geben. Man sollte deshalb axiomatisierend vorgehen.
- 4) Die Bedeutung abstrakter mathematischer Begriffsbildungen muss wenigstens partiell deutlich werden. Dies kann auf drei verschiedene Arten geschehen:
 - a) ein höheres Abstraktionsniveau erleichtert häufig Beweisführungen und
 - b) vereinfacht die Definition mathematischer Begriffe, wodurch eine bessere Handhabung ermöglicht wird.
 - c) Durch die Behandlung mathematischer Grundstrukturen werden Bezüge zwischen zunächst getrennt erscheinenden Gebieten aufgezeigt.
- 5) Wo immer es möglich und sinnvoll ist, sollte Einblick in Abstraktionsvorgänge vermittelt werden. Das kann nur dadurch geschehen, dass die Schüler Gelegenheit erhalten, Abstraktionen selbst bewusst durchzuführen.
- 6) Der Mathematikunterricht soll sich an Problemen orientieren und von daher zumindest einen Teil seiner Motivation beziehen. Die Problemstellungen sollen von möglichst vielfältiger Art sein, kein wichtiger Typ darf vernachlässigt werden.
- 7) Es sind vielfältige Formen von Beweisführungen (von angemessenem Schwierigkeitsgrad) vorzustellen und von den Schülern selbst durchzuführen. Nur so ist eine Vertrautheit mit mathematischen Schlussweisen zu erlangen und eine Schulung logischer Grundregeln, die auch über den Bereich der Mathematik hinaus Bedeutung haben, möglich.
- 8) Ein angemessener Vorrat logischer Symbole kann (und sollte) in der Kollegstufe ohne Schwierigkeiten verwendet werden. Der Nutzen bei der übersichtlichen Notierung mathematischer Sachverhalte ist unmittelbar einsichtig und bedarf deshalb keiner ausführlichen Motivation. Zur Einübung genügt der ständige Gebrauch.
- 9) Um ein realistisches Bild der Mathematik zu entwerfen, darf nicht der Eindruck entstehen, dass als mathematische

Objekte nur Zahlen und Zahlvariablen sowie geometrische Begriffe vorkommen. Diese Information ist auch für solche Schüler wichtig, die nicht beabsichtigen, Mathematik zu studieren.

II.2 Topologie als Unterrichtsstoff in der Kollegstufe

Der Vorschlag, in der Kollegstufe auch Kurse in Topologie anzubieten, bedarf einer eingehenden Begründung. Geht man zunächst von dem Kriterium einer inhaltlichen Vorbereitung auf ein späteres Mathematikstudium aus, so kann festgestellt werden, dass die Topologie hier mit jedem denkbaren anderen mathematischen Gebiet durchaus konkurrieren kann. Selbst die Behandlung der Infinitesimalrechnung kann - wenn sie in traditioneller Weise geschieht - sicher nicht besser auf eine universitäre Analysisvorlesung vorbereiten. Sie vermittelt lediglich - zugegeben - eine bessere Fertigkeit im konkreten Differenzieren und Integrieren, ist aber einer wünschenswerten Verallgemeinerung eher hinderlich; vor allem, weil der notwendige Apparat der Epsilontik nicht gerade dazu dient, die Begriffe durchsichtig zu machen. In erster Linie aber verlagert eine Behandlung der Topologie die Schwerpunkte des Mathematikunterrichtes in einer begrüßenswerten Richtung: im Vordergrund steht nicht die reine Faktenvermittlung bzw. das Nachvollziehen erlernter Techniken, sondern die Erarbeitung einer Axiomatik und die klare Strukturierung eines mathematischen Gebietes, vor allem aber immer wieder die exakte Überprüfung von Vermutungen, die sich aus anschaulichen Überlegungen ergeben. Häufig kann auch ohne Verlust an Exaktheit rein anschaulich argumentiert werden. Alle vertretbaren Schwierigkeitsgrade und Variationen mathematischer Beweise kommen vor, wobei die Komplexität im Verlauf des Kurses stetig steigt.

Die Realisierbarkeit der dieser Arbeit zugrundeliegenden didaktischen Prinzipien (s. S. 14/15) kann im Einzelnen erst durch den vorgeschlagenen Lehrgang belegt werden. Sie wurde in ihm sehr konsequent verfolgt. Insbesondere wurden durchgehend Anregungen zur Mathematisierung gegeben; die Erarbeitung neuer Begriffe entspricht durchgehend diesem Prinzip. Damit wurde zumindest für die Thesen 1 - 3, die dieses Prinzip umschreiben, gezeigt, dass die Topologie als für die Kollegstufe relevanter Unterrichtsstoff angesehen werden muss. Die Arbeit geht mit der mathematisierenden Aufbereitung der Topologie einen völlig neuen Weg, denn obwohl dieser didaktische Weg keineswegs neu ist¹⁾, hat er bisher insbesondere in der Topologie eine deutlich untergeordnete Rolle gespielt. Die Lektüre der gängigen Lehrbücher und der veröffentlichten Ansätze zur Didaktik der Topologie in der Schule belegt eindeutig die durchgehende Vorherrschaft des deduzierenden Vorgehens. In keinem Fall wurde die Realisierbarkeit eines konstruktiven mathematisierenden Verfahrens zum Auswahlkriterium für die zu behandelnden Stoffe gemacht. Auch Papy, der sich mit seiner "Topologie als Grundlage des Analysisunterrichts" ((28)) im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit sogar an Schüler der Sekundarstufe I wendet, macht keinen Versuch in dieser Richtung. Vielmehr begnügt er sich jeweils - wenn überhaupt - mit kaum motivierten anschaulichen Vorüberlegungen und rechtfertigt neue Definitionen höchstens im Nachhinein durch die erzielten Ergebnisse. Eine Diskussion, warum die Begriffe nun gerade so und nicht anders zu bilden sind, findet ebenso wenig statt, wie versucht wird, schon vor den Definitionen wenigstens in Ansätzen ihren Nutzen zu demonstrieren. Zur Motivierung der Schüler vertraut Papy vor allem auf graphische Darstellungen.

Im Gegensatz dazu entwickelt diese Arbeit sämtliche neuen Begriffe aus Problemstellungen, die sich aus dem Vorhergehenden organisch ergeben. So kann jeweils deutlich gemacht werden, warum ein neuer Begriff - meist als abkürzende Sprechweise für einen bereits bekannten Sachverhalt - geprägt werden muss. Darüber hinaus sind die Überlegungen so angelegt, dass für die Definitionen nur wenige Alternativen

¹⁾ Freudenthal (42) hat ihn schon 1963 angeregt

offenbleiben, sodass sie von den Schülern meist selbst formuliert werden können.

Die Thesen 4 und 5 unterstreichen die Bedeutung der Behandlung einfacher mathematischer Strukturen, auch wenn Mathematik natürlich nicht mit Strukturmathematik verwechselt werden darf. Wahlkurse über Boolesche Algebra sind ja auch in Bayern schon vorgesehen¹⁾, ausserdem werden einige algebraische Strukturen in Linearer Algebra und Geometrie behandelt. Die Topologie nun bietet sich sowohl vom relativ geringen Umfang grundlegender Axiomatik als auch von der Vielzahl mathematisch gleichwertiger Alternativen (offene und abgeschlossene Mengen, Umgebungen, Filter) her durchaus für eine Überprüfung auf ihre Eignung hin an.

These 6 ist eine ganz selbstverständliche Forderung an jeden Mathematikunterricht aller Schulstufen; eine häufig zu beobachtende Neigung zu einseitigen Problemstellungen hat wohl ihren Grund in einer ungenügenden Kenntnis der verschiedenen Möglichkeiten. Der vorgelegte Lehrgang jedenfalls beinhaltet sowohl offene (A12) und assoziative (S.249), als auch reversible (A30), funktionale (A39), mathematisch variable (A19-A24) und transversale (7.11-7.13) Problemstellungen - die angegebenen Beispiele sind ganz willkürlich herausgegriffen und können ohne weiteres vermehrt werden.

Zur Verwirklichung der Thesen 7 - 9 schliesslich ist die Topologie sicherlich ebenso gut, wenn aber auch wohl nicht besser geeignet als vergleichbare mathematische Disziplinen. Insgesamt dürfte damit deutlich geworden sein, dass es keinen Grund gibt, die Topologie als für die Kollegstufe ungeeignet zu bezeichnen, zumal ihre didaktischen Möglichkeiten sicherlich noch nicht völlig ausgeschöpft sind.

Als letztes Argument für die Eignung der Topologie für den Mathematikunterricht der Kollegstufe soll noch angedeutet werden, wie sie mit dem übrigen Stoff des Mathematikunterrichts in Einklang zu bringen ist.

¹⁾ (40) gibt eine detaillierte Schilderung

Zunächst ist es denkbar, mit ihm die Erkenntnisse aus der Mengenalgebra anzuwenden und zu vertiefen. Im Gegensatz zu anderen Stoffen der Kollegstufenmathematik verlieren die Begriffe der Mengenlehre hier nämlich den Charakter blosser Formulierungshilfen; sie sind vielmehr Grundlage und Bestandteile der neu zu entwickelnden Theorie.

Weiter schlägt die Topologie eine Brücke zwischen den üblicherweise doch recht getrennt behandelten Gebieten Geometrie und Analysis. Die Gemeinsamkeiten werden z.B. durch die Stetigkeit geometrischer Abbildungen betont.

Am wesentlichsten scheint aber die direkte Wechselwirkung mit dem Analysisunterricht zu sein, die auf zwei verschiedene Weisen denkbar ist:

- 1) Aufbau des Analysisunterrichts auf topologischen Grundlagen.
- 2) Nachträgliche oder zeitlich parallele Verallgemeinerung und Vertiefung der im Analysisunterricht behandelten Begriffe.

Schon aus durch die Lehrpläne (s. (40) S. 160 ff.) vorgegebenen zeitlichen Zwängen scheidet die erste Möglichkeit normalerweise allerdings aus. Der zweite der angegebenen Wege sollte jedoch realisierbar sein. Schliesslich erlaubt der Kollegstufenunterricht aufgrund der Wahlmöglichkeiten ein erweitertes Stoffangebot, das nicht auf Kosten traditionell behandelter Gebiete gehen muss, auch wenn eine solche Konsequenz durchaus nicht ausgeschlossen sein soll.

III Ein Topologielehrgang für die Kollegstufe

III.1 Die Entstehungsgeschichte des Lehrganges

Zu Beginn des Schuljahres 1971/72 genehmigten die Schulleitungen des Parler-Gymnasiums und des Hans-Baldung-Gymnasiums Schwäbisch Gmünd dem Autor, für die Schüler der Klassen 11 und 12 eine freiwillige Arbeitsgemeinschaft in Topologie anzubieten. Es meldeten sich 20 Teilnehmer, die aus organisatorischen Gründen in 2 ungleich starke Gruppen (14+6) eingeteilt wurden. Die Arbeitsgemeinschaft konnte pro Woche auf Wunsch der Schulleitungen nicht mehr als 1 Stunde in Anspruch nehmen.

Bis zum Ende des Jahres 1971 mussten aufgrund der sehr unterschiedlichen und zum Teil völlig fehlenden Vorkenntnisse die notwendigen Mengenbegriffe bereitgestellt werden. Die anschliessenden Topologiekurse verliefen bewusst sehr offen und ohne exakte Vorplanung, um möglichst viele Anregungen gewinnen zu können. Die beiden Arbeitsgemeinschaften waren nur insofern gekoppelt, als jeweils die in einem Kurs zutage getretenen didaktischen Fehler im anderen vermieden wurden. Auch inhaltlich waren die Kurse nicht identisch, auch wenn sich beide im Rahmen des in II.3 dargestellten Kurses hielten.

Zum Ende des Schuljahres 1971/72 war in beiden Kursen etwa der Stoff der Kapitel I - III behandelt. Die 6 Schüler, die sich bereit fanden, die Arbeitsgemeinschaft auch in das Schuljahr 1972/73 zu verlängern, wurden nun zu einer Gruppe zusammengefasst. Der restliche Stoff nahm dann noch die Zeit bis Ende 1972 in Anspruch.

Ergänzt wurden diese Schulversuche durch zwei Übungen mit Studierenden der Pädagogischen Hoch=

schule Schwäbisch Gmünd, und zwar im So-Se 1972 die zweistündige Übung "Topologie" mit ca. 40 Teilnehmern (Stoff: Kapitel I - IV) und im Winter 1972/73 die einstündige Übung "Analysis auf topologischer Grundlage" mit 3 Teilnehmern (Stoff: Kapitel I, II, V).

Die Schulversuche und die Übungen ergänzten sich dann bei der endgültigen Formulierung des Lehrganges gegenseitig. Dazu ein Beispiel: Der Umgebungsbegriff erschien zunächst der von der Anschauung her zugänglichste der topologischen Grundbegriffe zu sein. Im Kurs 1 gelang es auch recht schnell, die zugehörige Axiomatik zu motivieren, die sich jedoch in der Folge als ausserordentlich unhandlich erwies. Im Kurs 2, der mit einer leichten Verzögerung zu topologischen Themen überging, wurde deshalb sofort die Definition des topologischen Raumes (axiomatisch) zugrunde gelegt. Hier nun ergaben sich Verständigungsschwierigkeiten, sobald der triviale Fall endlicher Mengen verlassen wurde. In der Übung "Topologie" wurde die Definition dann von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ her motiviert. Schliesslich erwies sich in der Übung "Analysis auf topologischer Grundlage" die zweidimensionale Veranschaulichung als optimal und die Theorie der metrischen Räume als ausserordentlich hilfreich bei der Verifikation nicht nur der Eigenschaften offener Mengen.

Der vorgelegte Topologiekurs ist somit das Ergebnis einer schrittweisen Optimierung. Er gibt die einzelnen Versuche nicht protokollarisch wieder, sondern entstand aus der Auswertung der gesammelten Erfahrungen. Er sollte deshalb als Grundlage für eine Diskussion der Didaktik der Topologie dienen können.

Zu erwähnen ist noch, dass die Schulversuche

unter recht ungünstigen äusseren Bedingungen zu leiden hatten. Die absolute Freiwilligkeit liess manchen Teilnehmer beim Auftauchen von Schwierigkeiten den Weg des geringsten Widerstandes gehen und fernbleiben. Da von den Schulleitungen ausserdem die Auflage erteilt worden war, die Schüler keinesfalls unnötig zu belasten, waren offensichtliche Leistungstests und Hausaufgaben unmöglich, sodass kaum eine Motivation zu gelegentlicher Wiederholung ausserhalb der Kurse gegeben war. Und schliesslich liess die Umstellung vom gewohnten Mathematikunterricht auf einen Eigeninitiative fordernden Unterrichtsstil mit der Betonung abstrakter, innermathematischer Problemstellungen manchen Schüler vorzeitig aufgeben.

Umso grössere Anerkennung gebührt denjenigen, die durchstanden und durch ihr Engagement diese Arbeit erst möglich machten.

III.2 Erläuterungen zum Lehrgang

Die Behauptung, Topologie eigne sich als Unterrichtsstoff für die Kollegstufe, kann natürlich nicht nur durch globale Ausführungen belegt werden. Es ist notwendig, einen konkreten Weg zur Realisierung zu weisen und ihn so weit aufzubereiten, dass er einer direkten Überprüfung zugänglich ist. Am geeignetsten erschien dazu die Form eines Lehrerhandbuches mit didaktischen und methodischen Hinweisen, das auch genügend Material an Beispielen und Übungsaufgaben bereitstellt. Die Lösungen der Aufgaben wurden allerdings aus naheliegenden (Umfangs-) Gründen nicht beigelegt.

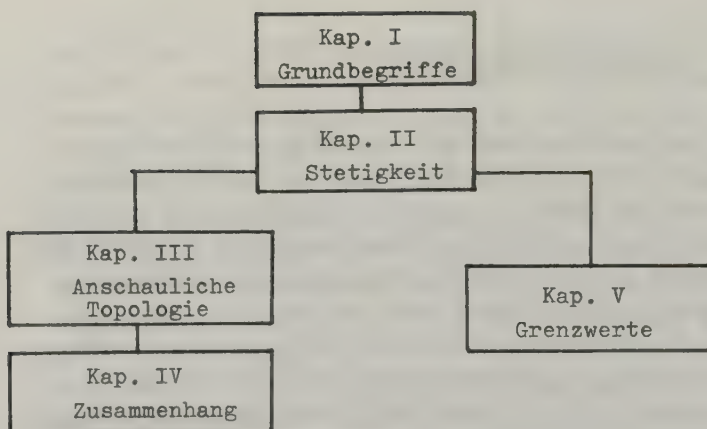
a) Einsatzmöglichkeiten

Der Lehrgang unterscheidet sich in Inhalt und didaktischer Aufbereitung so sehr von dem herkömmlichen Mathematikunterricht, dass zum jetzigen Zeitpunkt nicht empfohlen werden kann, ihn für sämtliche Schüler der Kollegstufe verbindlich vorzuschreiben. Eine solche Forderung wäre im Augenblick auch aus vielen anderen Gründen unrealistisch. Er ist dagegen sicher als Spezialgebiet für Interessierte geeignet, d.h. als ein Wahlpflichtgebiet für Teilnehmer der Leistungskurse.

Diese Einschränkung der Einsatzmöglichkeiten des Lehrganges ist nicht gleichzusetzen mit einer Abschwächung der oben behaupteten Eignung der Topologie als Unterrichtsstoff für die Kollegstufe oder mit einer kritischen Distanzierung des Autors von seinen eigenen didaktischen Ansätzen. Sie entspringt vielmehr der sicher nicht unbegründeten Unsicherheit darüber, ob Mathematik in der aktuellen Situation überhaupt als obligatorisches Fach in der Kollegstufe sinnvoll ist.

b) Stoffauswahl und Aufbau

Bestimmend für die Gliederung des Kurses war der mathematisierende Ansatz. Neue Begriffe werden demnach erst dann eingeführt, wenn sie durch den vorhergehenden Gedankengang notwendig gemacht wurden. Auf einen aus Gründen der Abgeschlossenheit naheliegenden linearen Aufbau wurde verzichtet, um den Lehrer nicht in unerlaubter Weise auf die Vorstellungen des Autors zu fixieren. So ergibt sich etwa nach Kapitel 2 eine deutliche Gabelung:



Der Lehrgang stellt einen Gesamtrahmen dar, aus dem in verschiedener Weise einzelne Teilkurse zusammengestellt werden können. Anregungen dazu gibt III.2.c.

Die Stoffauswahl musste neben den bereits angesprochenen insbesondere die folgenden Kriterien berücksichtigen:

- 1) Die wichtigsten Begriffe der Topologie können nicht ausgeklammert werden.
- 2) Der Bezug zu verwandten Gebieten der Schulmathematik muss deutlich gemacht werden. Das bedingt etwa die Behandlung der punktwisen Stetigkeit und des Grenzwerts, als dessen Anwendungen sich Differentialquotient und Riemannsches Integral ergeben.
- 3) Eine gewisse Höchstgrenze für den Schwierigkeitsgrad durfte nicht überschritten werden. Das verbietet z.B., den Lehrgang auf dem Filterbegriff aufzubauen, obwohl das durchaus möglich ist ¹⁾, allerdings vermutlich nur aus fachlicher Sicht.

¹⁾ s. etwa Litverz. Nr. (6)

Der verschiedentlich gemachte Vorschlag, diese Möglichkeit auf den Schulunterricht zu übertragen ¹⁾, ist wohl abzulehnen, da die Filtertheorie vermutlich zu hohe Anforderungen an das Abstraktionsvermögen der Schüler auch in der Kollegstufe stellt, kaum relevante Veranschaulichungen erlaubt ²⁾ und die Durchführung zumindest eines Kurses über topologische Grundbegriffe auch aus fachlicher Sicht nicht vereinfacht.

c) Variationsmöglichkeiten

Selbst für den Fall, dass die Topologie eine Chance im Mathematikunterricht der Kollegstufe erhalten sollte, kann man wohl realistischerweise nicht davon ausgehen, dass sie einen höheren Status als den eines Wahlpflichtgebietes erhalten könnte. Für die Wahlpflichtgebiete ist jeweils ein Studienhalbjahr bei 3 Wochenstunden vorgesehen, sodass der Entwurf eines Lehrganges auf dieser Basis zu konzipieren ist.

Andererseits war nicht beabsichtigt, nur eine Alternative für einen solchen Lehrgang anzubieten. Der im Folgenden dargestellte Stoff ist deshalb vom Umfang her so reichlich bemessen, dass aus ihm in verschiedener Weise ein geschlossener Kurs ausgewählt werden kann.

Die Skizze auf S. 24 macht die grundsätzliche Wahlmöglichkeit zwischen einer Ausrichtung auf die Anschauliche Topologie bzw. auf die Analysis deut-

¹⁾ s. Griesel Nr. (22) und Dzewas Nr. (20) u. (21)

²⁾ Auch die Einführung des Integrals über Filter - dargestellt etwa in (41) S. 20 - ist wohl mehr aus fachsystematischer Sicht interessant, da für die in Frage kommenden einfachen Beispiele der Riemannsche Ansatz völlig gleichwertig ist.

lich. Beide Alternativen sind vom Umfang her für reichlich ein Studienhalbjahr bemessen. Dies ist naturgemäss ein Schätzwert, der je nach Individuallage der Klasse und Tiefgang des Kurses erheblich über- oder unterschritten werden kann. Einige zeitliche Variationen sollen deshalb angedeutet werden.

Alternative I: Grund= lagen	§ 1	Metrische Räume
	§ 2	Topologische Räume
	§ 3	Umgebungen
	§ 4	Abgeschlossene Mengen
	§ 5	Rand und abgeschlossene Hülle
	§ 6	Erzeugung von Topologien
	§ 7	Stetige Abbildungen

§ 14	Grenzwert von Funktionen
§ 15	Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$
§ 16	Grenzwert von Folgen
§ 17	Kompakte Räume

Erweiterungen sind hier durch eine Behandlung der zusammenhängenden Räume und des Zwischenwertsatzes denkbar.

Nicht unbedingt erforderlich für den Fortgang des Kurses sind die Begriffe des Randes und der abgeschlossenen Hülle. Sie können demnach entfallen, wenn sie auch einiges zur Präzisierung des Zusammenhanges zwischen den topologischen Begriffen und ihren Veranschaulichungen leisten.

Die Theorie der kompakten Räume ist ohne Zweifel der anspruchsvollste Teil dieses Lehrganges. Sie ist daher sehr günstig am Ende plazierte. Schon von dieser Lage her bietet es sich an, notfalls auf die kompakten Räume zu verzichten, zumal ihr Zusammenhang mit den bekannten Grundlagen der Analysis nicht ganz so elementar ist wie bei den vorhergehenden Abschnitten.

Alternative 2:

Grundlagen (s.o.)

-
- | | |
|------|---------------------------------|
| § 8 | Topologische Abbildungen |
| § 9 | Unikursale Netze |
| § 10 | Topologische Mannigfaltigkeiten |
| § 11 | Zusammenhängende Räume |
| § 12 | Der Jordansche Kurvensatz |
| § 13 | Der Zwischenwertsatz |

Als möglicher Zusatz bietet sich natürlich der wichtige Begriff des Grenzwertes von Funktionen an. Weiter lässt sich insbesondere Kapitel III sehr leicht durch anschaulich topologische Probleme (Vierfarbenproblem etc.) erweitern¹⁾. Da hierzu jedoch bereits genügend didaktische Vorarbeit geleistet worden ist²⁾, wurde im Rahmen dieser Arbeit lediglich das Problem der unikursalen Netze exemplarisch behandelt.

Stoffliche Einschränkungen sind in vielerlei Weise möglich: Kapitel IV kann ganz oder teilweise abgetrennt werden. Allerdings geht dabei wieder eine Klammer zum Analysis-Zweig verloren und dabei ein Hinweis auf eine wichtige Aufgabe der Topologie. Ebenso ist ein Verzicht auf den Begriff der punktwisen Stetigkeit ohne weitere Folgen für das Verständnis des Folgenden möglich. Es erheben sich jedoch dieselben Bedenken wie bei Kap. IV in verstärktem Masse.

Die Behandlung der topologischen Mannigfaltigkeiten ist für den weiteren Stoff nicht erforderlich.

Bei Alternative 2 ist darüber hinaus noch eine Variation in der Reihenfolge der zu behandelnden Abschnitte möglich. Man kann nämlich die unikursalen Netze vorweg ohne jegliche topologische Vorkennt-

¹⁾ s. z.B. Arnold, Nr. (2)

²⁾ etwa in (2) und (37)

nisse diskutieren und damit ein anschauliches Vorverständnis für topologische Fragestellungen ermöglichen. Im Nachhinein bleibt dann noch zu zeigen, dass es sich hierbei tatsächlich um eine topologische Problematik handelt, d.h. dass Problem und Lösung sich bei topologischen Abbildungen nicht verändert.

Es sei schliesslich darauf verwiesen, dass der vorgeschlagene Einstieg über die metrischen Räume nicht die einzige Lösung darstellt. Andere Möglichkeiten beschreiben Papy¹⁾, Jahner²⁾ und Pickert³⁾.

¹⁾ s. (28) u. (30)

²⁾ s. (24)

³⁾ s. (31)

III.3 Der Lehrgang

Kapitel I	Grundbegriffe	S.	31
§ 1	Metrische Räume		32
§ 2	Topologische Räume		62
§ 3	Umgebungen		69
§ 4	Abgeschlossene Mengen		78
§ 5	Rand und abgeschlossene Hülle einer Menge		88
Kapitel II	Stetige Abbildungen		97
§ 6	Erzeugung von Topologien		106
§ 7	Stetige Abbildungen		114
Kapitel III	Anschauliche Topologie		146
§ 8	Topologische Abbildungen		147
§ 9	Unikursale Netze		156
§ 10	Topologische Mannigfaltigkeiten		166
Kapitel IV	Zusammenhängende topologische Räume ...		170
§ 11	Zusammenhängende Räume		173
§ 12	Der Jordansche Kurvensatz		185
§ 13	Der Zwischenwertsatz		188
Kapitel V	Grenzwerte		193
§ 14	Grenzwerte von Funktionen		194
§ 15	Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$		208
§ 16	Grenzwerte von Folgen		213
§ 17	Kompakte Räume		222

Vorkenntnisse

Benötigt werden vor allem die Grundbegriffe der Mengen=algebra:

$A = \{1, 2, 3\} = \{x: x^2 < 10\}_{\mathbb{N}}$, also die aufzählende und die beschreibende Schreibweise für Mengen

$u \in A$ heisst: u ist Element der Menge A

$u \notin A$ " u ist nicht Element von A

$U \subset A$ " U ist Teilmenge von A

$U \subsetneq A$ " U " echte Teilmenge von A

$\emptyset$ ist das Symbol für die leere Menge

$\mathcal{P}(A)$ " " " " " Potenzmenge von A

$A \cup B$ ist die Vereinigungsmenge von A und B

$A \cap B$ " " Schnittmenge " " " "

$A \times B$ " das kartesische Produkt " " " "

$A \setminus B$ " die Differenzmenge A ohne B

Auch wenn die logischen Symbole weitgehend als Formulierungshilfe dienen, sollte ihre Beziehung zu den Mengenbegriffen bekannt sein. Verwendet werden:

$\wedge$ (und), $\vee$ (einschliessendes oder), $\neg$ (nicht)

$\Rightarrow$ (Implikation)

$\Leftrightarrow$ (log. Äquivalenz)

$\bigwedge$ (der Allquantor)

$\bigvee$ (der Existenzquantor)

An Schlussweisen benötigt man

die Distributivgesetze und die Regeln von de Morgan (vor allem in ihrer Formulierung für Mengen), das Gesetz der Kontraposition (indirekter Beweis) und vereinzelt die vollständige Induktion.

Kapitel I

GRUNDBEGRIFFE

§ 1 Metrische Räume

Obwohl es durchaus denkbar erscheint, sofort axiomatisch mit den Eigenschaften einer Topologie einzusteigen, wird hier der Umweg über die metrischen Räume eingeschlagen. Die Begründung fällt nicht schwer:

- 1.) Durch die Behandlung verschiedener Metriken wird die Abstands- und damit die Raumvorstellung relativiert. Dies ist eine wesentliche Voraussetzung zum Verständnis topologischer Fragestellungen.
- 2.) Die Tatsache, dass auf derselben Menge verschiedene Metriken angegeben werden können, die dann auch -oft - verschiedene offene Mengen erzeugen, zwingt dazu, sich mit den Eigenschaften der Systeme offener Mengen zu beschäftigen. Die Eigenschaften von Topologien lassen sich auf diese Weise leicht gewinnen.
- 3.) Die Handhabung eines vorgegebenen - nicht begründeten - Axiomensystems auf einer Mengenmenge wird den meisten Schülern ohne Frage Schwierigkeiten bereiten. Durch eine nachträgliche Verifikation auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen lässt sich nur schwer begründen, warum das Axiomensystem gerade so und nicht anders gewählt wurde.
- 4.) Mit der Behandlung der metrischen Räume gewinnt man für spätere Veranschaulichungen stets eine ganze Klasse von Beispielen, was natürlich Zeit spart und das Verständnis vertieft. Ausserdem ist bei vielen Anwendungen (Setigkeit in einem Punkt etc.) eine grössere Allgemeinheit möglich.

- 5.) Nicht zu übersehen ist der Vorteil, dass eine ganze Reihe später notwendiger Überlegungen und Schlussweisen hier auf recht einfacher Stufe durchgeführt werden. Die Schüler werden so nicht gleich zu Beginn durch zu komplexe Schlüsse verwirrt.
- 6.) Mit nur wenigen Impulsen lässt sich ein bedeutender Abstraktionsprozess nachvollziehen.
- 7.) Die Behandlung verschiedener Metriken ist teilweise in ihren Konsequenzen recht vergnüglich und motiviert so von der Sache her.
- 8.) Eine Metrik entspricht nicht dem üblichen Schema von Abbildungen $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass auch der Abbildungsbegriff verallgemeinert und für weitere Anwendungen brauchbarer gemacht wird.

Zusammenfassend kann also behauptet werden, dass der durch eine gründliche Behandlung der metrischen Räume zweifellos entstehende Zeitverlust später fast völlig wieder aufgeholt werden kann und ihm andererseits bedeutende didaktische Vorteile gegenüberstehen, die man nicht leichtfertig aufgeben sollte.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit ihrer natürlichen Topologie wird - neben der "Zeichenebene" $\mathbb{R}^2$ - stets das wichtigste Beispiel zur Veranschaulichung sein. Es ist also wichtig, gleich zu Anfang eine sichere Kenntnis ihrer Eigenschaften sicherzustellen. Von $\mathbb{R}$ aus beginnt auch der oben angesprochene Abstraktionsprozess.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zeichnet sich vor beliebigen Mengen durch drei wichtige Eigenschaften aus:

- a) In $\mathbb{R}$ sind Zahloperationen (z.B. die Addition) definiert. Die Zahloperationen sind innere Verknüpfungen, d.h. Abbildungen der Form

$$\begin{array}{lcl} +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

- b) Die Elemente von $\mathbb{R}$ sind linear angeordnet, d.h. zwischen je zwei reellen Zahlen r, s besteht immer genau eine der drei Beziehungen:

$$r < s$$

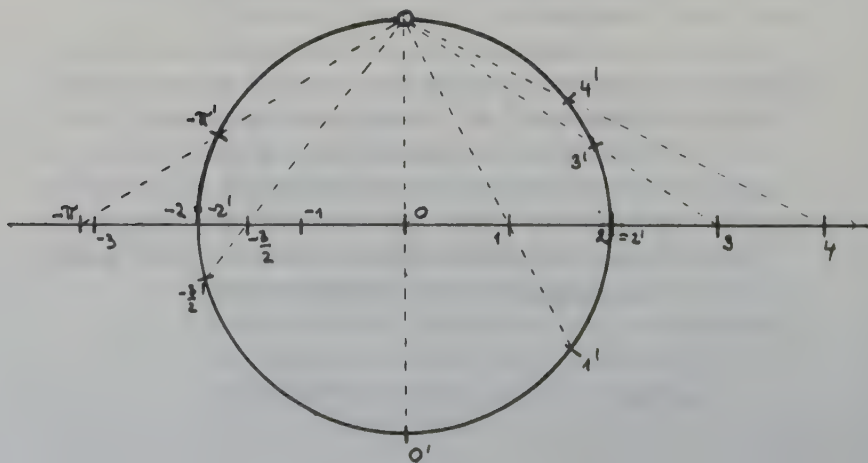
$$r = s$$

$$s < r$$

In der üblichen Darstellung von $\mathbb{R}$ als Menge der Punkte auf einer Geraden (der "Zahlengeraden") ist das ganz offensichtlich:



Die Zahlengerade ist aber nicht die einzige mögliche Veranschaulichung von $\mathbb{R}$. So kann man jedem Punkt der Zahlengeraden umkehrbar eindeutig durch stereographische Projektion einen Punkt eines Kreises zuordnen. Dies wird an verschiedenen Stellen des Kurses ausgenutzt werden.



Als dritte wesentliche Eigenschaft erhalten wir die Existenz einer Metrik auf $\mathbb{R}$.

Die ohne Zweifel wichtige Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ soll hier ausgespart bleiben. Sie wird meist in ihrer Tragweite von den Schülern kaum erfasst werden können und führt auch nicht - wie die anderen drei angesprochenen Eigenschaften - auf eine der drei mathematischen Grundstrukturen (nach Bourbaki). Sie soll in diesem Lehrgang nicht vertieft behandelt werden, obwohl man sie an einigen Stellen benötigt. (Nähere Erläuterungen s. S. 172)

- c) Man kann je zwei reelle Zahlen nicht nur ihrer Grösse nach vergleichen, sondern auch ihren "Grössenunterschied", d.h. ihren Abstand, exakt ermitteln. Der Abstand zweier reeller Zahlen ist eine eindeutig bestimmte reelle Zahl, die Zuordnung

$$(x, y) \mapsto |x - y|$$

beschreibt also eine Abbildung

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Beispielsweise ist

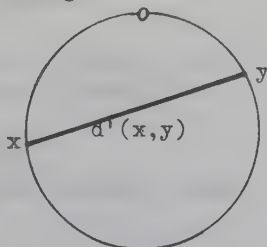
$$d((-1, 3)) = d((3, -1)) = |3 - (-1)| = |4| = 4$$

$$d((2, \pi)) = d((\pi, 2)) = \pi - 2$$

$$d((5, 5)) = 0$$

Eine weitere Abstandsfunktion erhält man anschaulich aus der Kreisdarstellung von $\mathbb{R}$:

$d'(x, y)$ ist der geometrische Abstand zwischen den Punkten x und y auf dem Kreis.



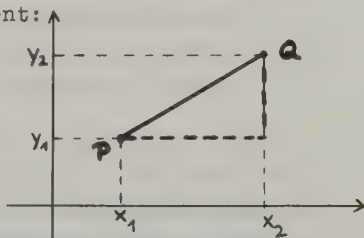
Es entsteht nun der Eindruck, als liege mit einer Abstandsfunktion wiederum eine innere Verknüpfung wie im Falle der algebraischen Operationen vor. Dass dies nur für den Spezialfall der reellen Zahlen zutrifft, beweist die nahe= liegende Übertragung auf die Zeichenebene ($\mathbb{R}^2$):

Hier liegt mit dem geometrischen Abstand eben= falls eine Abbildung vor, die den Namen "Ab= standsfunktion" verdient:

Hat man $P(x_1/y_1)$
und $Q(x_2/y_2)$,

so ist $d(P,Q) =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



d ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

Wir halten fest:

- 1.) Eine Abstandsfunktion (man sagt meist kürzer "Metrik") auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Damit haben wir aber sicher nicht alle Forderungen gestellt, die eine Abstandsfunktion erfüllen sollte. Untersuchen wir deshalb die uns schon bekannten Metriken auf weitere gemeinsame Eigenschaften:

- 2.) Die Metriken sind symmetrisch,
d.h. für je zwei beliebige reelle Zahlen (oder Punkte aus $\mathbb{R}^2$) x und y gilt

$$d(x,y) = d(y,x)$$

- 3.) Die Abstände reeller Zahlen (oder Punkte aus $\mathbb{R}^2$) sind jeweils positiv oder 0:

$$d(x,y) \geq 0$$

Beides entnimmt man unmittelbar der Anschauung.

Weiter ist klar, dass zwei Punkte x und y nur dann keinen Abstand (exakt: den Abstand 0) haben, wenn sie identisch sind:

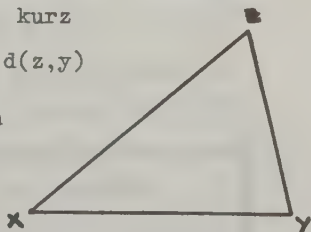
$$4.) \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

Die fünfte Eigenschaft schliesslich, die sogenannte "Dreiecksungleichung", ist bereits aus dem elementaren Geometrieunterricht bekannt:

Die Länge einer Dreiecksseite ist nie grösser als die Summe der beiden anderen, kurz

$$5.) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

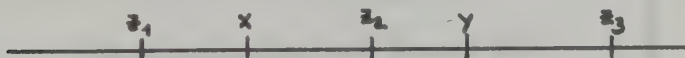
Dies gilt offensichtlich auch für die durch die Kreisdarstellung von $\mathbb{R}$ definierte Metrik d' .



Zu untersuchen bleibt die erste der angegebenen Metriken auf $\mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x - y|$$

Ohne Einschränkung kann man zum Beweis annehmen, dass $x \leq y$ sei, also $d(x,y) = y - x$ ist.



$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall: } z_1 < x & \implies d(x, z_1) = x - z_1 \\ & \quad d(z_1, y) = y - z_1 \\ \implies d(x, z_1) + d(z_1, y) &= x + y - 2z_1 = \\ &= y - x + 2x - 2z_1 = \\ &= d(x, y) + 2d(x, z_1) \\ &\geq d(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Fall: } x \leq z_2 \leq y & \implies d(x, z_2) = z_2 - x \\ & \quad d(z_2, y) = y - z_2 \\ \implies d(x, z_2) + d(z_2, y) &= y - x = \\ &= d(x, y) \\ &\geq d(x, y) \end{aligned}$$

3. Fall: $y < z$

Hier geht man analog zu Fall 1 vor
(Aufgabe!)

Wir können nun wieder daran gehen, die Zahl unserer Eigenschaften, die eine Metrik charakterisieren, einzuschränken:

$$2.) \wedge 4.) \wedge 5.) \implies 3.)$$

$$0 = d(x,x) \leq \underset{4}{d(x,y)} + \underset{5}{d(y,x)} = \underset{2}{2d(x,y)}$$

also: $0 \leq d(x,y)$

Weitere Versuche zur Vereinfachung schlagen fehl.
Wir definieren:

M Menge. $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildung

d Metrik (auf M) $\iff$

(1.1)

(M1) $\bigwedge_{x,y \in M} d(x,y) = d(y,x)$

(M2) $\bigwedge_{x,y \in M} d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M3) $\bigwedge_{x,y,z \in M} d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(M,d) heisst dann metrischer Raum.

Drei Beispiele metrischer Räume haben wir bereits besprochen. Auch auf ganz beliebigen Mengen gelingt es stets, eine Metrik anzugeben:

B1 $M = \{a,b,c\}$

d	a	b	c
a	0	1	2
b	1	0	3
c	2	3	0

Aus der Verknüpfungstafel sind (M1) und (M2) sofort abzulesen (wie?).

(M3) hingegen muss ausführlich verifiziert werden:

$$0 = d(a,a) \leq d(a,b) + d(b,a) = 1 + 1 = 2$$

u.s.w.

Aufgaben:

A1 Wieviele Ungleichungen müssen in B1 verifiziert werden?

A2 Vervollständigen Sie die Verknüpfungstafel so, dass eine Metrik auf $N = \{u, v, w\}$ entsteht.

d	u	v	w
u		8	
v			
w	9		

A3 Zeigen Sie, dass die angegebene Abbildung $f: P \times P \longrightarrow \mathbb{R}$ sicher keine Metrik auf $P = \{0, \alpha, !\}$ ist.

f	0	α	!
0	1	1	1
α	1	1	1
!	1	1	1

Geben Sie zwei weitere Abbildungen von $P \times P$ nach $\mathbb{R}$ an, die gegen je ein weiteres Axiom aus (1.1) verstossen.

A4 Auf jeder beliebigen Menge kann man eine Metrik (die "diskrete") so definieren:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

a) Weisen Sie nach, dass tatsächlich eine Metrik vorliegt.

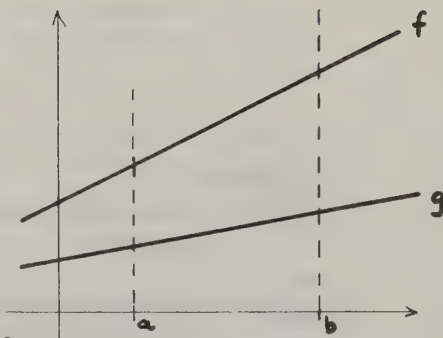
b) Für welche Zahlen k ist

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ k & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

ebenfalls eine Metrik auf einer beliebigen Menge?

A5

F sei die Menge der linearen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ($f(x) = mx + c$)
 a, b seien zwei verschiedene reelle Zahlen. Durch welche der folgenden Vorschriften ist eine Metrik auf F gegeben?



- a) $d_1(f, g) = f(a) - g(a)$
- b) $d_2(f, g) = |f(a) - g(a)|$
- c) $d_3(f, g) = \max(|f(x) - g(x)|) \quad (x \in [a, b])$
- d) $d_4(f, g)$ ist der Inhalt der von den beiden Graphen und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzten Fläche.

Die angeführten Beispiele sollten genügen, um die Abstraktion des Begriffes "Metrik" zu ermöglichen.

Die für Anwendungen ohne Zweifel wichtigste Metrik ist der übliche Abstand in $\mathbb{R}$ (Zahlengerade), $\mathbb{R}^2$ (Ebene) und $\mathbb{R}^3$ (Anschauungsraum). Man gibt ihr einen speziellen Namen:

(1.2) Der der Anschauung entsprechende Abstand bestimmt die

natürliche Metrik

auf $\mathbb{R}^n$.

Abkürzende Schreibweise: d_n

A6

- a) Berechnen Sie für die Punkte $P(1/3/7)$ und $Q(3/0/1)$ den Abstand $d_n(P, Q)$.
- b) Nach welcher Formel errechnet sich allgemein $d_n(P, Q)$ für Punkte $P(p_1/p_2/p_3)$ und $Q(q_1/q_2/q_3)$ aus $\mathbb{R}^3$?

Es ist offensichtlich, daß beim Übergang vom geometrischen Anschauungsraum zu metrischen Räumen sehr viele vertraute Begriffe, z. B. der des Winkels, ihren Sinn verlieren. Man kann zwar Geraden und Strecken auch in metrischen Räumen erklären und so einen Zugang zu sehr interessanten Überlegungen zur geometrischen Axiomatik erschließen¹⁾, nur ein geometrischer Begriff bietet sich aber direkt zur Übernahme in metrische Räume an: Kreis (in der Ebene) und Kugel (im Raum) sind allein über den Abstand definiert.

- A7** a) Beschreiben Sie die Kreisfläche bzw. die Kreislinie mit Mittelpunkt P und Radius r als Punktmenge in $(\mathbb{R}^2, d_n)$.
b) P_1 sei ein Punkt aus $\mathbb{R}^n$, r_1 eine reelle Zahl.
Beschreiben Sie anschaulich
ba) $\{Q: d_n(P_1, Q) < r_1\}$ bb) $\{Q: d_n(P_1, Q) \leq r_1\}$
bc) $\{Q: d_n(P_1, Q) = r_1\}$ bd) $\{Q: d_n(P_1, Q) > r_1\}$
Welche Bedingung ist an die Zahl r_1 zu stellen, damit sich sinnvolle Mengen ergeben?

Die Mengen aus A7 b lassen sich natürlich nicht nur in $\mathbb{R}^n$ bilden. Auf entsprechende Weise kann man in beliebigen metrischen Räumen spezielle Mengen vor anderen auszeichnen. Die Namensgebung liegt nahe: "Kreis" und "Kugel" sind die beiden Alternativen. In Angleichung an die übliche Sprechweise wird man sich für "Kugel" entscheiden.

Mit Hilfe einer Abstands-(un-)gleichung können im Wesentlichen 5 verschiedene Definitionen begründet werden. Sinnvollerweise wird man sich für diejenigen entscheiden, die den grössten Nutzen versprechen.

¹⁾ s. (18) Litverz.

Der Grenzfall des Radius $r = 0$ (bzw. sogar $r < 0$) wird ausgeschlossen, da sich dadurch später begriffliche Schwierigkeiten ergeben würden. Man nimmt dabei in Kauf, dass die leere Menge nicht per definitionem offen ist, sondern erst als solche bestätigt werden muss.

Die Notwendigkeit, sich auf wenige Begriffe zu beschränken, ist unmittelbar einsichtig. Für die Auswahl bieten sich im Augenblick kaum Kriterien an, sodass der Hinweis auf den zukünftigen Nutzen sicher akzeptiert wird.

(X, d) metr. Raum, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$

(1.3) Die offene Kugel um x_0 mit Radius r ist die Menge

$$K(x_0, r) := \{x: d(x, x_0) < r\}$$

Die abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius r ist die Menge

$$\overline{K(x_0, r)} := \{x: d(x, x_0) \leq r\}$$

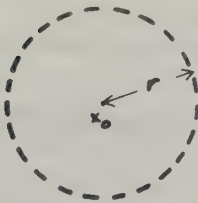
Die Begriffe wurden aufgrund der Analogie zu den offenen bzw. abgeschlossenen Intervallen so gewählt, obwohl sie in speziellen Räumen Mißverständnisse zulassen. Ähnliches gilt für die Symbolik bei den abgeschlossenen Kugeln, die die Übereinstimmung der abgeschlossenen Kugel mit der abgeschlossenen Hülle der offenen Kugel suggeriert, obwohl das nicht immer korrekt ist. Andererseits trifft der hier erweckte Eindruck in fast allen relevanten Fällen zu, sodaß durch das Symbol möglicherweise Erleichterungen in der Kommunikation erreicht werden.

Zum jetzigen Zeitpunkt wäre eine Diskussion über diese Fragen freilich aufgrund des fehlenden Überblicks völlig unangebracht; später¹⁾ sollte man aber durchaus einmal darauf aufmerksam machen.

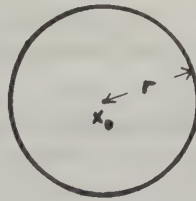
¹⁾ s. A41 auf S. 92

Die graphische Veranschaulichung insbesondere der offenen Kugeln ist nicht ganz unproblematisch. Papy¹⁾ wählt dazu einheitlich gefärbte Kreisflächen, deren Begrenzungslinie in einer anderen Farbe hervorgehoben ist. Ebenso anschaulich (wenn auch graphisch nicht so eindrucksvoll) und für selbstgefertigte Skizzen entschieden praktischer sind etwas verfremdete Venndiagramme:

offene Kugel



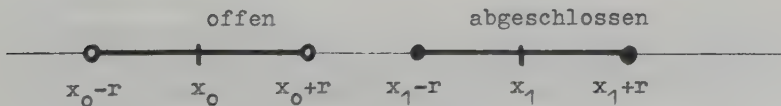
abgeschlossene Kugel



Der Verlust an Information (die inneren Punkte sind nicht als zugehörig zur Menge gekennzeichnet) ist wohl kaum sehr schwerwiegend.

AB a) Welche Gestalt haben die offenen bzw. abgeschlossenen Kugeln in (R, d_n) ?

Auch hier stellt sich wieder ein graphisches Problem, das etwa in folgender Weise gelöst werden kann:



¹⁾ Nr. (28) Litverz.

Der Begriff des Intervalles dürfte zumindest anschaulich in etwa bekannt sein. Deshalb lässt sich die Definition ohne Schwierigkeiten einschieben.

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

(1.4) Das offene (bzw. abgeschlossene) Intervall mit den Grenzen a und b ist die Menge

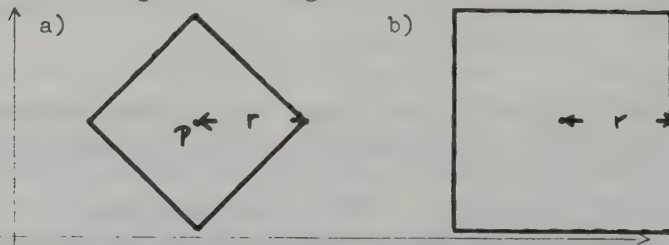
$$]a, b[:= \{x: a < x < b\}_{\mathbb{R}}$$

$$\text{bzw. } [a, b] := \{x: a \leq x \leq b\}_{\mathbb{R}}$$



A8 b) Zeigen Sie, dass jedes offene (abgeschlossene) Intervall eine offene (abgeschlossene) Kugel in $(\mathbb{R}, d_n)$ ist.

A9 Suchen Sie Metriken auf $\mathbb{R}^2$, deren abgeschlossene Kugeln die folgende Gestalt haben:



Man kann nun ganz seltsame Kugeln erzeugen.

A10 M sei eine beliebige Menge und d die diskrete Metrik auf M, x_0 sei ein beliebiger Punkt aus M. Ermitteln Sie zu

a) $r = 0,5$ b) $r = 1$ c) $r = 2$
jeweils $K(x_0, r)$ und $\overline{K(x_0, r)}$.

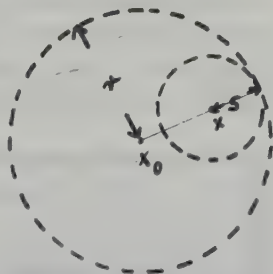
- A11** a) M sei ein metrischer Raum mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge von M eine offene Kugel ist (bei beliebiger Metrik!).
- b) Suchen Sie auf $M = \{a, b, c\}$ eine Metrik, bei der $\{a, b\}$ eine offene Kugel ist, $\{b, c\}$ jedoch nicht. Untersuchen Sie die Mengen $\{a\}$, $\{b\}$ und $\{c\}$.
- c) Zeigen Sie: In einem metrischen Raum mit endlich vielen Elementen ist jede einelementige Menge eine offene Kugel.

Offene und abgeschlossene Kugeln lassen sich weitgehend parallel behandeln, da sich verschiedene Ergebnisse aufgrund der sehr verwandten Definitionen sehr leicht übertragen lassen. Einen sehr wesentlichen (topologischen) Unterschied gibt es allerdings. Er wird uns zur Definition der offenen Mengen führen und die abgeschlossenen Mengen zunächst zurückdrängen.

Die anschauliche Vorstellung, dass jeder Punkt einer offenen Kugel "ein Stück" vom Rand entfernt sein muss, lässt sich recht einfach begrifflich fassen:

Ist $x \in K(x_0, r)$
und ist $d(x, y)$ kleiner als
die Entfernung des Punktes y vom Rand ($d(x, y) < s$),
so liegt y ebenfalls in $K(x_0, r)$

$$\text{m.a.W.} \quad K(x, s) \subset K(x_0, r)$$



(1.5) Jede offene Kugel enthält mit jedem Punkt x auch eine offene Kugel um x .

Den Beweisansatz liefert die obige Skizze: Man muss sich ja lediglich darüber klar werden, wie der Radius s zu wählen ist.

Man sieht: $s \leq r - d(x, x_0)$ (+)

und man zeigt leicht, dass die Veranschaulichung nicht getrogen hat:

$$K(x, s) \subset K(x_0, r)$$

ist gleichwertig mit

$$y \in K(x, s) \implies y \in K(x_0, r)$$

bzw.

$$d(y, x) < s \implies d(y, x_0) < r$$

mit dem Ansatz (+) erhält man daraus

$$d(y, x) < r - d(x, x_0) \quad \text{oder}$$

$$d(y, x) + d(x, x_0) < r \implies d(y, x_0) < r$$

Das aber ist aufgrund der Dreiecksungleichung selbstverständlich.

A12 Zeigen Sie an einem einfachen Beispiel, dass es keine zu (1.5) entsprechende Formulierung für abgeschlossene Kugeln gibt.

Man überzeugt sich sehr leicht¹⁾, dass nicht nur offene Kugeln die Eigenschaft (1.5) besitzen. Man kann also einen erweiterten Kreis von Teilmengen eines metrischen Raumes auszeichnen:

(X, d) metrischer Raum, $A \subset X$.

(1.6) A heisst offen $\iff \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{r > 0} K(x, r) \subset A$

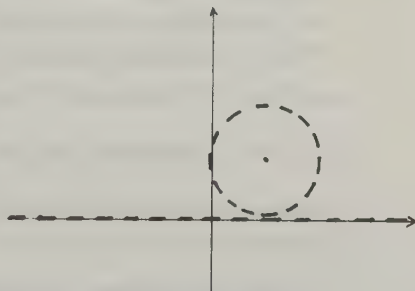
Die Veranschaulichung entspricht der der offenen Kugeln: der Rand der Menge wird gestrichelt dargestellt.



B2 Alle offenen Kugeln sind offene Mengen.

Man beweist das sehr leicht mit (1.5). Das Beispiel zeigt, daß - ausgehend vom Begriff der offenen Kugel - die Bezeichnung "offene Menge" durchaus sinnvoll gewählt wurde. An dieser Stelle bietet sich eine weitergehende Diskussion der Widerspruchsfreiheit dieser Begriffe (s.S. 92) noch nicht an.

B3 In $\mathbb{R}^2$ ist die obere Halbebene ohne die begrenzende Achse eine offene Menge, mit der Achse nicht (anschaulich klar).



A13 Eine offene Menge A enthält mit jedem Punkt x auch eine offene Kugel um x .
Vereinigen Sie alle diese offenen Kugeln!

Das Ergebnis von A13 liefert eine wichtige Charakterisierung der offenen Mengen. Die Lösung sei deshalb hier angegeben:
Einerseits liegt jeder Punkt von A in einer der offenen Kugeln:

$$A \subset \bigcup_{x \in A} K(x, r_x)$$

Andererseits ist jede

dieser Kugeln in A enthalten:

$$\bigcup_{x \in A} K(x, r_x) \subset A$$

Insgesamt: $A = \bigcup_{x \in A} K(x, r_x)$



¹⁾ Der Übergang (S. 46) von offenen Kugeln zu offenen Mengen wird in IV.2 durch eine Unterrichtseinheit ausführlicher geschildert (S. 243).

Dieser Schluss gilt rein formal natürlich auch für $A = \emptyset$,

denn $\emptyset$ kann als Vereinigung über eine leere Menge offener Kugeln gedeutet werden.

Die Kenntnis dieser Regel kann jedoch nur dort erwartet werden, wo eine gründliche Beschäftigung mit der Mengenalgebra vorausging.

Im anderen Fall weiss man nur:

Jede nichtleere offene Menge kann man als Vereinigung offener Kugeln darstellen. (A)

Die Umkehrung ist nahezu trivial:

Jede Vereinigung offener Kugeln ist eine offene Menge, (B)

denn jeder Punkt x der Vereinigung liegt in einer offenen Kugel, die (wegen 1.5) eine offene Kugel K_x mit Mittelpunkt x enthält. K_x ist natürlich in der Vereinigung der Kugeln enthalten.



Bleibt noch die leere Menge zu untersuchen:

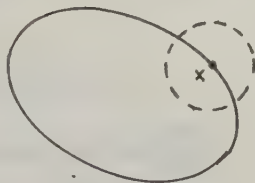
$$\emptyset \text{ ist offen} \iff \bigwedge_{x \in \emptyset} \bigvee_{r > 0} K(x, r) \subset \emptyset \quad (!)$$

Die rechte Seite der Äquivalenz (!) ist eine wahre Aussage: es gibt ja kein Element aus $\emptyset$, um das eine offene Kugel zu konstruieren wäre.

Es ist allerdings zu erwarten, dass die Schüler einer solchen formal-logischen Überlegung mit Skepsis begegnen. In diesem Fall dürfte ein indirekter Schluss leichter zu durchschauen sein. Gleichwertig zu (!) ist nämlich

$$\emptyset \text{ ist nicht offen} \iff \bigvee_{x \in \emptyset} \bigwedge_{r > 0} K(x, r) \not\subset \emptyset \quad (!!)$$

Allerdings ist auch die Umformung von (!) in (!!) recht formal, da man nur bei nicht leeren Mengen anschaulich erklären kann, warum die rechte Seite der Äquivalenz (!!) das Negat der rechten Seite von (!) ist.
Mit (!!) sieht man aber sofort



(1.7) $\emptyset$ ist in jedem metrischen Raum eine offene Menge !!

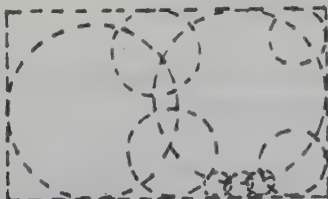
denn die rechte Seite der Äquivalenz (!!) ist natürlich immer falsch - $\emptyset$ enthält kein Element.
Zusammen mit (A) und (B) ergibt sich jetzt die angestrebte Charakterisierung der offenen Mengen:

(1.8) A ist offen $\Leftrightarrow A$ ist Vereinigung offener Kugeln oder $A = \emptyset$

Bei Kenntnis der Möglichkeit, Vereinigungen auch über leere Indextmengen vornehmen zu können, vereinfacht sich (1.8) zu

(1.8') A ist offen $\Leftrightarrow A$ ist Vereinigung offener Kugeln

B4 In $(\mathbb{R}^2, d_n)$ ist das Innere eines Rechtecks immer eine offene Menge:



A14 Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{R}, d_n)$ folgende Mengen offen sind:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------|
| a) $]1, 2[$ | b) $\{x: x > 0\}$ |
| c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | d) $\mathbb{R}$ |

A15 In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist durch $d(m, n) := \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ eine Metrik gegeben (Nachweis!).

- a) Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{N}, d)$ jede Menge mit einem Element offen ist.
- b) Sind damit alle offenen Mengen erfasst?
- c) Vergleichen Sie mit den offenen Mengen in $\mathbb{N}$, die von der diskreten Metrik (s. A4 S. 39) erzeugt werden.

In einem metrischen Raum (X, d) steht von jeder Menge $A \subset X$ eindeutig fest, ob sie offen ist oder nicht.

Ist X nicht mit einer Metrik versehen, so scheint es sinnlos zu sein, von offenen Mengen sprechen zu wollen, weil die Definition (1.6) vollständig von der zugrundegelegten Metrik abhängig ist. Eine einzelne Menge wird man somit kaum als offen bzw. nicht offen deklarieren können, da sich diese Eigenschaft (in verschiedenen metrischen Räumen) leicht ändern kann:

B5 In $\mathbb{R}$ ist eine Menge mit einem Element bei der natürlichen Metrik nicht offen, wohl aber bei der diskreten Metrik.

Wir kennen bisher nur eine Menge in jedem metrischen Raum, die immer offen ist:

$$\emptyset !!!$$

Es gibt auch nur noch eine weitere Teilmenge eines Raumes (X,d) , die sich für eine Untersuchung anbietet:

X

denn man kennt in einem beliebigen Raum X gar keine weiteren. Sehr leicht sieht man

(X,d) metrischer Raum

(1.9) X ist eine offenen Menge

Beweis mit (1.6): Sei $x \in X$

$r > 0 \implies K(x,r) \subset X$ q.e.d.

Bei allen anderen Teilmengen eines metrischen Raumes hängt es meist¹⁾ von der Metrik ab, ob sie offen sind oder nicht.

Will man jedoch von offenen Mengen auch dort sprechen, wo keine Metrik vorliegt, wird man versuchen müssen, Mengeneigenschaften zu formulieren, die von der zugrundeliegenden Metrik unabhängig sind.

Für eine einzelne offene Menge wird man sicher keine solchen definierenden Eigenschaften finden: s. B5!

Vielleicht aber für die gesamte Menge aller offenen Mengen?

¹⁾ Bei endlichen metrischen Räumen nicht - s. A11!

Bevor man sich an die Untersuchung der Eigenschaften dieser Menge macht, scheint eine begriffliche Vereinfachung angebracht.

Korrekt müßte man nämlich immer von

"der Menge aller offenen Mengen in einem metrischen Raum"

sprechen. Dieser Bezeichnungswurm ist aber kaum vertretbar. Da aber Abkürzungsversuche durchwegs zu mißdeutbaren Formulierungen führen (z. B. "Menge offener Mengen"), wird man am besten einen neuen Begriff prägen müssen. Die einfachste Lösung ist es, ohne Umwege das gebräuchliche Fachwort einzuführen, das ohnehin irgendwann fallen muß (und später genauso wenig erklärbar ist wie jetzt):

(X, d) metrischer Raum

(1.10) Die Menge aller offenen Mengen in X nennt man die (durch d erzeugte) Topologie auf X .

Untersuchen wir nun die Mengeneigenschaften einer solchen Topologie. Die Besprechung von Beispielen ist zu diesem Zeitpunkt nicht erforderlich, da genügend Vorerfahrungen vorliegen.

Man weiß bereits:

Jede Topologie auf X enthält die (offenen) Mengen
 $\emptyset$ und X .

Eine entsprechende Festlegung weiterer Teilmengen von X (X ist ja eine völlig beliebige Menge!) wird sicher nicht gelingen.

Zusätzliche Eigenschaften einer Topologie auf X kann man also höchstens aus ihrem Verhalten gegenüber den bekannten Mengenoperationen gewinnen.

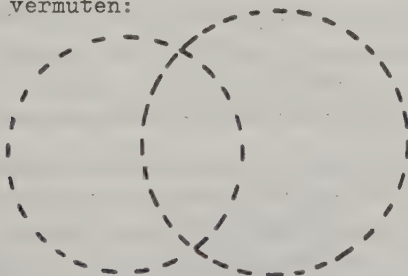
Konkret: Inwiefern ist eine Topologie gegenüber den verschiedenen Operationen abgeschlossen?

In Frage kommen die Vereinigung von Mengen
der Durchschnitt von Mengen
die Differenzmenge

Nicht in Frage kommt das kartesische Produkt von Mengen:

denn das Produkt zweier Elemente einer Topologie auf X (und damit zweier Teilmengen von X) ist i.a. keine Teilmenge von X und deshalb auch keiner Topologie auf X zugehörig.

Die Ergebnisse lassen sich aufgrund einer einfachen Skizze vermuten:



a) Vermutlich ist die Vereinigung zweier offener Mengen offen.

Verifikation: Kann man auf (1.8') zurückgreifen, so ist alles sehr einfach:

Vereinigt man offene Mengen, die ja ihrerseits wieder Vereinigungen offener Kugeln sind, so erhält man insgesamt natürlich wieder eine Vereinigung offener Kugeln - eine offene Menge.

Auch wenn nur (1.8) zur Verfügung steht, ist der Sachverhalt kaum schwerer zu durchschauen: denn sollte unter den zu vereinigenden offenen Mengen auch $\emptyset$ sein, so muß diese gar nicht berücksichtigt werden. Man betrachtet nur die Mengen, die "echte" Vereinigungen offener Kugeln sind und argumentiert wie oben.

Liegt aber überhaupt keine nichtleere offene Menge vor, so ist die Vereinigung leer und damit offen.

Wie durch die gewählten Formulierungen schon angedeutet wurde, gelten dieselben Überlegungen auch für die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen. Den Fall der Vereinigung über eine leere Indexmenge sollte man schliesslich an dieser Stelle nicht überstrapazieren, zumal er später durch die Definition der Topologie abgedeckt wird (s. Bemerkungen S. 58).

Man kann also feststellen:

(X, d) metr. Raum

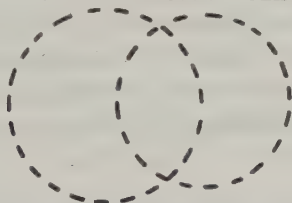
(1.11) Die Vereinigung beliebig vieler (offener) Mengen aus der Topologie auf X gehört wieder zur Topologie (ist wieder offen).

Man sollte beide vorgeschlagenen Formulierungen des Satzes gebrauchen, da die eine (offene Mengen) die elegantere und meist gebrauchte ist, während die andere auf eine nützliche schriftliche Notierung der Topologieaxiome hinzielt.

A16 Beweisen Sie (1.11) über die Definition (1.6).

Achtung: Auch in diesem Fall kann die leere Menge begriffliche Schwierigkeiten machen, wenn nicht bekannt ist, dass eine Subjunktion mit falscher Prämisse stets wahr ist.

- b) Beim Durchschnitt offener Mengen wird man nicht mit der Darstellung als Vereinigung offener Kugeln operieren können, da der Durchschnitt offener Kugeln i.a. nicht wieder eine offene Kugel ist:



Dagegen führt die Definition (1.6) rasch zum Ziel.



$$x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B$$

$$\implies \bigvee_{r_1 > 0} \bigvee_{r_2 > 0} K(x, r_1) \subset A \wedge K(x, r_2) \subset B$$

Zwischen r_1 und r_2 besteht sicher eine der beiden Beziehungen:

$$r_1 \leq r_2 \quad \text{oder} \quad r_2 \leq r_1$$

Sei etwa $r_1 \leq r_2$ ($r_1 = \min(r_1, r_2)$), so ist (aus der obigen Skizze ersichtlich)

$$K(x, r_1) \subset K(x, r_2) \subset B$$

$$\text{also} \quad K(x, r_1) \subset A \cap B$$

Dieser Schluss ist allgemeingültig - auch für den Fall disjunkter Mengen A, B.

In diesem Fall muß er aber wegen (1.7) gar nicht geführt werden.

Man weiß jetzt:

Die Schnittmenge von je zwei offenen Mengen ist wieder offen

und kann sich fragen, inwieweit - wie in (1.11) - verallgemeinert werden kann. Die eben demonstrierte Herleitung nimmt aber sehr viel stärker auf die beiden betrachteten Mengen Bezug:

A17 Eine Stelle der obigen Herleitung macht bei der Übertragung auf den Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen Schwierigkeiten. Welche?

Ein Beispiel, das zeigt, dass eine Analogie zu (1.11) nicht in vollem Umfang möglich ist, wird man wohl selbst vorgeben müssen:

B6 Metrischer Raum: $(\mathbb{R}, d_n)$
Jede offene Kugel $K(0, r) =]-r, r[$ ist offen, der Durchschnitt

$$\bigcap_{r>0}]-r, r[= \{0\} \quad (1)$$

jedoch nicht.

Beweis von (1): 0 liegt in jeder Kugel $K(0, r)$,

$$\text{also } \{0\} \subset \bigcap_{r>0}]-r, r[$$

$$\text{Sei } x \neq 0 \implies |x| > 0$$

$$x \notin]-|x|, |x|[\implies x \notin \bigcap_{r>0}]-r, r[$$

Man muss sich also zufrieden geben mit

(1.12) (X, d) metr. Raum, $A, B \subset X$

$$A, B \text{ offen} \implies A \cap B \text{ offen}$$

(Die Topologie enthält mit A und B auch $A \cap B$)

Anstelle von (1.12) findet man meist

(1.12') Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

A18 Beweisen Sie (1.12') mit Hilfe von (1.12).

Bemerkung: Die in A18 nötige Induktion kann man mit vollem Recht bei $n = 1$ beginnen lassen. Die Aussage von (1.12') trifft zwar auch für den Durchschnitt von 0 Mengen zu, erfahrungsgemäß wird jedoch kaum ein Schüler auf diesen Gedanken verfallen (s. auch Bemerkung S. 58).

Hier und im Folgenden wird der Form (1.12) der Vorzug gegeben. Sie erlaubt leichtere Verifikationen und ist auch von der Form her etwas einprägsamer.

c) Es gibt noch eine gebräuchliche Mengenoperation, die nicht aus dem zugrundeliegenden metrischen Raum X herausführt: die Mengendifferenz. Ein Beispiel mag genügen, um aufzuzeigen, daß man hier keine allgemeingültigen Aussagen machen kann:

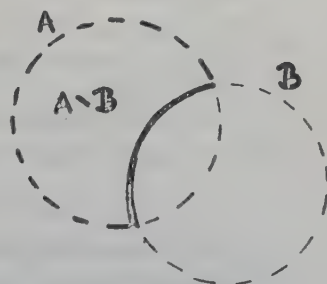
B7 In $\mathbb{R}$ sind die Mengen $A =]0,2[$
und $B =]0,1[\cup]1,2[$

sowohl bei der natürlichen wie bei der diskreten Metrik offen.

Bei d_n ist $A \setminus B = \{1\}$ nicht offen und
 $B \setminus A = \emptyset$ offen,

bei d_d sind beide Mengen jedoch offen (wie jede Teilmenge von $\mathbb{R}$).

Anschaulich: $A \setminus B$ kann Teile des Randes enthalten, muss also nicht offen sein.



Zusammenfassung: Jede Topologie (Menge aller offenen Mengen) in einem metrischen Raum hat folgende Eigenschaften:

- (1) Die Topologie enthält $\emptyset$
- (2) Die Topologie enthält X (die Grundmenge)
- (3) Die Topologie enthält mit beliebig vielen Mengen auch deren Vereinigung
- (4) Die Topologie enthält mit 2 (bzw. endlich vielen) Mengen auch deren Schnittmenge.

Bemerkung: An dieser Stelle wäre es natürlich möglich, diese Liste der Eigenschaften einer Topologie noch zu vereinfachen. Denn bekanntlich folgt ja (1) aus (3) und (2) aus (4) wegen

$$\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset \quad \text{und} \quad \bigcap_{A \in \emptyset} A = X$$

Diese beiden Regeln dürften jedoch i.a. nicht bekannt sein. Sie sind auch derart formal, dass sie von den Schülern kaum wirklich akzeptiert werden dürften.

Für die Beibehaltung von (1) und (2) spricht noch, dass sie die anderen Axiomen an konkret fassbarem Inhalt übertreffen, dass sie leicht zu merken und zu verifizieren sind und dass (2) eine einfachere Formulierung von (4) erlaubt (s. Bem. S. 57).

Es ist nun sehr einfach, die gefundenen Eigenschaften noch prägnanter zu fassen:

Gibt man der Topologie einen Namen - etwa $\mathcal{T}$ -, so kann man die gesamte Mengensymbolik einsetzen:

$$(1') \quad \emptyset \in \mathcal{T}$$

$$(2') \quad X \in \mathcal{T}$$

$$(4') \quad A, B \in \mathcal{T} \implies A \cap B \in \mathcal{T}$$

Diese Übersetzungen sind so einfach, dass sie von den Schülern selbst prompt vollzogen werden. Etwas schwieriger ist eine geschlossene Darstellung von (3).

Möglich wäre etwa, die zu vereinigenden Mengen mit einem Index zu versehen:

$$A_i \in \mathcal{T} \quad (i \in I) \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \quad (a)$$

Da die Indexmenge jedoch in den meisten Fällen nicht konkret angegeben werden kann, bleibt diese Schreibweise sehr häufig sinnleer und damit schwer motivierbar. Etwas einfacher zu begründen ist die folgende Form:

$$\alpha \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{A \in \alpha} A \in \mathcal{T} \quad (b)$$

Denn eine beliebige Menge offener Mengen ist immer eine Teilmenge der Topologie. Noch eleganter ist die u.a. von Papy¹⁾ verwendete Schreibweise

$$\alpha \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \alpha \in \mathcal{T}$$

was möglicherweise aber auch Missdeutungen (Vereinigung von Mengenmengen!) verursachen kann. Aus demselben Grund erheben sich auch noch Bedenken gegen (a), die sich zu wenig von

$$(4'') \quad A_i \in \mathcal{T} \quad (i=1, \dots, n) \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$$

abhebt, sodass der wichtige Unterschied in der Schärfe zwischen (3) und (4) verwischt werden kann (zumal oft die Neigung besteht, "endlich viele" und "beliebig viele" in einen Topf zu werfen).

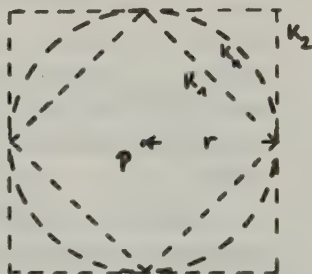
Im Folgenden wird daher die Formulierung (b) verwendet. Die eventuell auftauchende Frage nach der Vereinigung über die leere Teilmenge von $\mathcal{T}$ lässt sich dann nur durch einen Hinweis auf den erwähnten formalen Schluss beantworten.

Die Definitionen (1.6) und (1.10) ordnen jeder Metrik auf einer Menge X eindeutig eine Topologie auf X zu. Man sollte abschliessend noch darauf hinweisen, dass diese Zuordnung keineswegs umkehrbar ist:

¹⁾ s. Litverz. Nr. (28) S. 88; diese Notationsform dürfte dort für den Schulunterricht erstmals in Erwägung gezogen worden sein.

B8 In endlichen metrischen Räumen erzeugt jede Metrik dieselbe Topologie: die Potenzmenge (s. A11).

B9 In $\mathbb{R}^2$ erzeugen die Metriken d_n sowie
 $d_1(P, Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$
 und
 $d_2(P, Q) = \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$
 zwar verschiedene offene Kugeln, aber dieselben offenen Mengen:



Es ist $K_1(P, r) \subset K_n(P, r) \subset K_2(P, r)$,

jede bei d_2 offene Menge ist also auch bei d_n und d_1 offen.

Andererseits zeigt

$$K_2(P, \frac{r}{2}) \subset K_n(P, \frac{r}{2}) \subset K_1(P, r)$$

die Umkehrung.

Aufgaben

- 1) Geben Sie auf $M = \{a, b\}$ eine Metrik an und ermitteln Sie alle offenen Mengen in M .
- 2) In $\mathbb{R}^2$ sei $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_2 - x_1|$ und $P(2/3)$. Skizzieren Sie die Menge $\{Q: d(P, Q) < 2\}$
 Ist d eine Metrik?
- 3) Die Menge $N = \{(x, y): 0 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 5\} \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich als Quadratfläche darstellen. Auf N soll die natürliche Metrik gegeben sein. Skizzieren Sie die offenen Kugeln $K(P_i, 1)$ mit $P_1(0/0)$, $P_2(3/2)$ und $P_3(2/5)$.

- 4) In einem metrischen Raum (X, d) sei die "Strecke" $\overline{PQ}$ definiert durch $\overline{PQ} := \{R: d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)\}$. Stellen Sie eine solche Strecke für verschiedene metrische Räume, insbesondere in $\mathbb{R}^2$ bei verschiedenen Metriken (s. B9) anschaulich dar'.
- 5) Gibt es eine Metrik in $\mathbb{R}^2$, deren offene Kugeln die geometrische Gestalt gleichseitiger Dreiecke haben?
- 6) Das offene Intervall $]0, 1[$ ist als Vereinigung abgeschlossener Intervalle darstellbar, während das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ sich nicht als Vereinigung offener Intervalle deuten lässt. Nachweis!
- 7) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen in $(\mathbb{R}, d_n)$ offen sind:
- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| a) $A = \{x: 0 < x < 1\}$ | b) $B = \{x: x^2 < 1\}$ |
| c) $C = \{x: x^2 < -1\}$ | d) $D =]0, 1[\cup [1, 2]$ |
| e) $E = \{x: x \leq 0 \wedge x < 1\}$ | |

§ 2 Topologische Räume

Zur Definition offener Mengen in metrischen Räumen und zur Konstruktion der zugehörigen Topologie musste jeweils die Kenntnis der Metrik vorausgesetzt werden. Die anschliessend abgeleiteten Eigenschaften von Topologien waren jedoch völlig unabhängig von der zugrundeliegenden Metrik und von der Beschaffenheit des Raumes X . Sie eignen sich, vor allem, da sie rein mengentheoretisch formuliert sind, zur weiteren Verallgemeinerung auf beliebige Mengen, die nicht notwendig mit einer Metrik versehen sind. Mit diesem Ziel sind die Eigenschaften von Topologien ja entwickelt worden.

So wie man die Eigenschaften der Abstandsfunktion in $\mathbb{R}$ verwendet hat, um auf beliebigen Mengen einen Abstand (eine Metrik) einführen zu können, definiert man nun eine Topologie auch in nichtmetrischen Räumen über die Eigenschaften von Topologien in metrischen Räumen:

X beliebige Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$

(2.1) $\mathcal{T}$ heisst Topologie auf X $\Leftrightarrow$

$$(T_1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}$$

$$(T_2) \quad X \in \mathcal{T}$$

$$(T_3) \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}$$

$$(T_4) \quad A, B \in \mathcal{T} \implies A \cap B \in \mathcal{T}$$

Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Topologie auf X .

¹⁾ Das Axiomensystem ist nicht unabhängig. Man sollte es trotzdem nicht zu vereinfachen versuchen (Begr. S. 58f.)

Die Eigenschaften von Topologien liessen sich durch die Schreibweise

$$A \in \mathcal{T}$$

für

A gehört zur Topologie

bzw.

A ist eine offenen Menge

sehr stark formalisieren und dadurch übersichtlicher gestalten. Es ist allerdings darauf zu achten, dass einige Schüler die verkürzte Schreib- und gestelztere Redeweise nicht sofort akzeptieren werden. Es ist daher zu empfehlen, an dieser Stelle behutsam vorzugehen. Günstig ist es, die neue Symbolik nur schriftlich zu verwenden und es für den mündlichen Ausdruck bei der plastischeren (und gebräuchlicheren) Redeweise der offenen Mengen zu belassen.

Eine offene Menge ist somit einfach ein Element einer Topologie.

Die Definition (2.1) lässt nun allerdings über die bisher gewohnten hinaus noch weitere Topologien zu:

B10 In $X = \{a, b, c, d\}$ erzeugen alle Metriken dieselbe Topologie

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(X) \quad (\text{s.B8})$$

Diese Topologie nennt man die "diskrete" Topologie auf X (sie wird auf jeder Menge X durch die diskrete Metrik erzeugt).

In derselben Menge X sind aber auch

$$\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, \{a\}, X \}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{ \emptyset, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X \} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{T}_t = \{ \emptyset, X \}$$

Topologien, denn sie erfüllen (2.1).

Achtung: Bei τ_2 ist $\{c,d\}$ eine offene Menge, bei τ_1 nicht!

- A19** Auf $X = \{1,2,3\}$ gibt es insgesamt 29 Topologien.
- Geben Sie (soweit möglich) jeweils eine mit 1,2,3,4,5,6,7,8,9 offenen Mengen an.
 - Wieviel Prozent aller Mengen von Teilmengen von X sind Topologien auf X ?
 - Welche Topologie erzeugt die diskrete Metrik auf X ?
 - Geben Sie eine beliebige Metrik auf X an und konstruieren Sie die zugehörige Topologie.

Da auf endlichen Mengen jede Metrik dieselbe Topologie erzeugt, gibt es also Topologien, die nicht durch Metriken erzeugt werden können.

Umgekehrt weiß man, daß jede Metrik auf einer Menge X eine Topologie auf X erzeugt, sodaß man - ein wenig ungenau - zusammenfassen kann:

(2.2) Jeder metrische Raum ist ein topologischer S Raum, aber nicht umgekehrt.

Man kann zeigen, daß die Einschränkung von (2.2) auch in beliebigen Räumen mit mehr als einem Element gilt:

- A20** X sei eine beliebige Menge mit mehr als einem Element, $a \in X$. Zeigen Sie, daß die Topologie $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ nicht von einer Metrik auf X erzeugt werden kann.

Die Lösung dieser überdurchschnittlich schweren Aufgabe sei ausnahmsweise angegeben.

Annahme: τ sei von einer Metrik d erzeugt.

Da $\{a\}$ offen ist, gibt es wegen (1.6) ein $r > 0$ mit

$$a \in K(a,r) \subset \{a\} \quad \text{d.h.} \quad K(a,r) = \{a\}.$$

Für jedes $b \neq a$ gilt daher $b \notin K(a,r)$ (x)

Andererseits ist $K(b,r) = X$, denn $K(b,r)$ muß b enthalten und offen sein.

Also: $a \in K(b,r)$ (xx)

Mit (x) und (xx) hat man einen Widerspruch zur Symmetrie der Metrik d.

Noch ein paar Übungen zur Definition der Topologie:

A21 Suchen Sie alle Topologien auf $X = \{u,v\}$.

A22 Untersuchen Sie, ob die angegebenen Mengen Topologien auf $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ sind.

- a) $\tau_1 = \{\{1\}, \{2,4,5\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4,5\}, \emptyset, X\}$
- b) $\tau_2 = \{\{2,4,6\}, \emptyset, \{1,3,5\}, X\}$
- c) $\tau_3 = \{\{2\}, \{2,4\}, \{2,4,6\}, X\}$
- d) $\tau_4 = \{\emptyset, \{2,3\}, \{4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{3,4,5\}, X\}$

Weitere Aufgaben desselben Typs sind leicht herzustellen.

A23 Es sei $\tau = \{A, B, A \cap B, A \cup B, \emptyset\}$.
Geben Sie Mengen A, B, X so an, dass τ eine Topologie auf X ist.

Die eben besprochenen Aufgaben sind zwar notwendig, um das Wesen einer Topologie voll zu erfassen, man sollte aber nicht unbedingt den Ehrgeiz haben, sie so lange zu üben, bis sie keinem Schüler mehr Schwierigkeiten machen. Zu gross ist die Gefahr, dass ein übertriebenes Verharren auf diesen sehr formalen Überlegungen, die zudem für das Folgende nur sehr begrenzt von Nutzen sind, Überdruß auslöst und die Freude an der Topologie trübt.

Abschliessend sei noch erwähnt:

(2.3) Die Anzahl der möglichen Topologien auf einer Menge X ist mindestens so gross wie die Anzahl der Elemente von X.

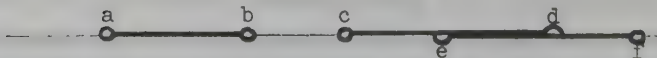
- Beweis: 1. Fall $X = \emptyset$. X enthält kein Element.
 $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$ ist die einzige Topologie.
2. Fall $X = \{a\}$.
 $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ist die einzige Topologie.
3. Fall X enthält mehr als ein Element.
 $a \in X \implies \mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ ist
 eine Topologie auf X .
 Zu jedem Element von X gibt es
 also (mindestens) eine Topologie.

Natürlich ist es möglich, die Anzahl der Topologien auf einer Menge mit n Elementen noch besser abzuschätzen (etwa durch $2^n - 1$). An dieser Stelle kann man sich jedoch mit der Erkenntnis begnügen, dass es im Regelfall mehrere Topologien auf derselben Menge gibt.

- (2.4) Die für konkrete Anwendungen wichtigste Topologie ist die von der natürlichen Metrik in $\mathbb{R}^n$ erzeugte "natürliche" Topologie $\mathcal{T}_n$. Sollten Verwechslungsmöglichkeiten gegeben sein, so wird die natürliche Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) mit $\mathcal{T}_n^2$ ($\mathcal{T}_n^3$) bezeichnet.

Erinnern wir uns noch einmal, welche Mengen bei dieser Topologie offen sind:

- a) In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ alle offenen Intervalle
 $]a, b[= \{x: a < x < b\}$



und beliebige Vereinigungen solcher Intervalle, etwa

$$\mathbb{R}^+ := \{x: x > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n-1, n+1[$$

- b) In $(\mathbb{R}^2, \tau_n)$ alle offenen Kreisscheiben

$$K(P, r) = \{Q: |\overline{PQ}| < r\}$$



und beliebige Vereinigungen davon, also anschaulich alle ebenen Flächen ohne ihre Begrenzungslinien.

- c) In $(\mathbb{R}^3, \tau_n)$ alle offenen Kugeln und Vereinigungen davon, anschaulich alle räumlichen Körper ohne ihre Oberflächen.

Es würde sicher keine prinzipiellen Schwierigkeiten machen, die natürliche Topologie auch auf $\mathbb{R}^n$ zu erklären. Die notwendigen Vorkenntnisse aus der analytischen Geometrie können jedoch meist nicht erwartet werden.

Schliesslich sei noch an zwei auf allen Mengen gegebene wichtige Topologien erinnert:

- a) die triviale Topologie $\tau_t = \{ \emptyset, X \}$
 b) die diskrete Topologie $\tau_d = \tau(X)$

Sie werden sehr häufig zur Verdeutlichung neuer Begriffe heranzuziehen sein.

Aufgaben

- 1) Wieviele offene Mengen gibt es mindestens (höchstens) in einem topologischen Raum mit 10 Elementen?

- 2) Untersuchen Sie die gegebenen Mengensysteme darauf, ob sie Topologien auf $X = \{1,2,3,4,5\}$ sind.
- a) $\{ \emptyset, \{1\}, \{2,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3\}, \{1,5,4,3,2\} \}$
- b) $\{ \emptyset, \{2,4,5\}, \{1,2,3\}, \{2\}, X \}$
- c) $\{ \emptyset, \{3,4\}, X, \{1,2,3\}, \{1,4,3,2\}, \{1,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,3,5\} \}$
- 3) Vervollständigen Sie die Mengensysteme aus 2), die keine Topologien sind, so, dass dieser Mangel behoben wird.
- 4) In $\mathbb{R}^2$ seien die Mengen
 $A = \{(x,y): x + y \geq -4\}$, $B = \{(x,y): x^2 + y^2 < 4\}$
 $C = \{(x,y): x > 1\}$, $D = \{(x,y): |y| \geq 2\}$
 gegeben.
 Untersuchen Sie Durchschnitte und Vereinigungen dieser Mengen darauf, ob sie offen sind.
- 5) In $\mathbb{R}$ sind $\mathcal{T}_1 = \{A: A \text{ enthält endlich viele Punkte oder } A = \mathbb{R}\}$
 und $\mathcal{T}_2 = \{A: A \text{ enthält unendlich viele Punkte oder } A = \emptyset\}$
 Systeme von Teilmengen. Liegen Topologien vor?

§ 3 Umgebungen

Aus topologischer Sicht gibt es keinen Grund, dem Umgebungsbegriff eine geringere Bedeutung zuzumessen als dem der offenen Menge, da die zugehörigen Axiomensysteme völlig gleichwertig sind. Daher könnte man durchaus versucht sein, einen Lehrgang in Topologie bei den Umgebungen zu beginnen, zumal sich hier Assoziationen aus der Umgangssprache anbieten. Ein Vergleich der Axiomensysteme zeigt jedoch sehr rasch, dass aus didaktischer Sicht die offenen Mengen den Umgebungen überlegen sind. Fällt es doch schon schwer, mit Mengen von Mengen (den Topologien) vertraut zu werden; wieviel mehr dann erst mit Mengen von Mengenmengen (welch ein Wort-ungeheuer!). Denn zu jedem Punkt eines topologischen Raumes gibt es einen Umgebungsfilter; zu betrachten sind aber stets alle Umgebungsfilter. Weitere Gründe für die Überlegenheit der Topologien sind in der Form der einzelnen Axiome selbst zu suchen. Die Umgebungsaxiome werden deshalb nur teilweise, soweit sie später noch benötigt werden, verifiziert; auf eine Gegenüberstellung der Axiomensysteme wird verzichtet. Eine solche Gegenüberstellung wird später bei den abgeschlossenen Mengen vorgenommen.

Eine Behandlung des Umgebungsbegriffes erscheint trotz der oben getroffenen Einschränkungen angebracht, weil er im weiteren Verlauf des Kurses einige Vereinfachungen erlaubt (etwa in § 8). Weiterhin lässt er sich sehr schön über den offenen Kern von Mengen herleiten, der wiederum reizvolle Optimierungsaufgaben ermöglicht und eine Gegenüberstellung der offenen und abgeschlossenen Mengen auch anschaulich absichert.

B11 In $\mathbb{R}$ ist die Menge $A = \{x: 0 < x \leq 1\}$

sicher nicht offen:

Kein offenes Intervall mit Mittelpunkt 1 ist in A enthalten.



$]0,1[= A \setminus \{1\}$ ist offensichtlich die "grösste" offene Teilmenge von A (sie enthält alle anderen).

Eine kleinste offene Obermenge von A wird man dagegen vergeblich suchen:

Eine solche Menge müsste wohl die Gestalt $]0,a[$ mit $a > 1$ haben,



es gibt jedoch keine kleinste solche Zahl
(es ist immer $1 < \frac{a+1}{2} < a$).

Will man also eine offene Menge angeben, die sich von einer vorgegebenen Menge "möglichst wenig unterscheidet", so wird man es wohl über die grösste offene Teilmenge versuchen:

(X, τ) top. Raum, $A \subset X$

(3.1) Die grösste offene Teilmenge von A nennt man
D den offenen Kern ($\overset{\circ}{A}$) von A .

Diese Definition setzt voraus, daß es stets eine solche grösste offene Teilmenge gibt. Darauf sollte man durchaus aufmerksam machen, falls es von den Schülern nicht selbst bemerkt wird. Es ist keineswegs selbstverständlich, daß Definitionen immer darauf überprüft werden, ob sie sinnvoll sind.

Vor dieser Überprüfung kann man noch ein Beispiel behandeln:

A24 X sei mit der diskreten (bzw. der trivialen) Topologie versehen. A sei eine beliebige Teilmenge von X . Suchen Sie den offenen Kern von A .

Es ist nicht ganz naheliegend, den offenen Kern über die Vereinigung der offenen Teilmengen zu konstruieren. Diese Vermutung kann man vorbereiten:

A25 $\mathcal{L}$ sei die Menge der offenen Teilmengen einer beliebigen Menge A (in einem top. Raum X). Gibt es eine Menge Y , auf der $\mathcal{L}$ eine Topologie ist?

Die Lösung dieser Aufgabe ($Y = \mathring{A}$) setzt wiederum die Existenz des offenen Kerns voraus. Außerdem muß man verifizieren, daß die Vereinigung offener Teilmengen von A wieder eine offene Teilmenge von A ist.

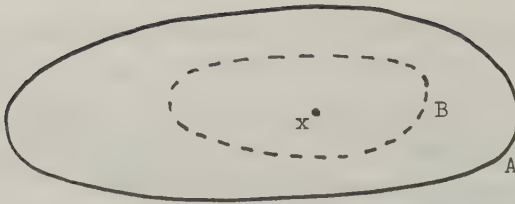
Die Vermutung liegt nun nahe:

$$\mathring{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{L}} B \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \{B: B \subset A \wedge B \in \tau\}$$

Beweis: Einerseits ist $\bigcup_{B \in \mathcal{L}} B$ eine offene Teilmenge von A , andererseits enthält $\bigcup_{B \in \mathcal{L}} B$ jede offene Teilmenge von A .

Diese Kennzeichnung des offenen Kerns ist allerdings wenig praktisch, da im Falle endlicher Topologien die größte offene Teilmenge einfacher durch Vergleich der in Frage kommenden Elemente der Topologie zu ermitteln ist und in unendlichen Räumen die Vereinigung aller offenen Teilmengen meist recht kompliziert ist (vgl. B4 auf S. 46). Günstiger wäre zweifellos eine Charakterisierung der Elemente von $\mathring{A}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathring{A} &\iff x \in \bigcup_{B \in \mathcal{L}} B \iff \bigvee_{B \in \mathcal{L}} x \in B \\ &\iff \bigvee_{B \in \mathcal{L}} x \in B \subset A \end{aligned}$$



Die Skizze legt zwei Bezeichnungen nahe:

(X, τ) top. Raum, $x \in X$, $U \subset X$	
(3.2)	a) U heisst <u>Umgebung von x</u> $\Leftrightarrow \bigvee_{B \in \tau} x \in B \subset U$ b) x heisst <u>innerer Punkt</u> von U $\Leftrightarrow U$ ist Umgebung von x .

Das erlaubt die folgende Charakterisierung von $\overset{\circ}{A}$:

(3.3)	Der offene Kern $\overset{\circ}{A}$ ist die Menge der inneren Punkte von A oder A ist Umgebung genau der Punkte von $\overset{\circ}{A}$.
-------	---

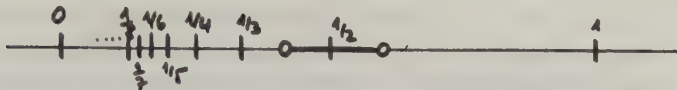
Der Umgebungsbegriff wird somit zunächst nur als Formulierungshilfe verstanden. Seine eigentliche Bedeutung kann erst im weiteren Verlauf des Kurses geklärt werden. Daher wird auch auf eine weitergehende Axiomatisierung verzichtet.

In metrischen Räumen lässt sich (3.2) noch etwas handlicher fassen:

x ist innerer Punkt
 von A $\Leftrightarrow$
 $\bigvee_{r>0} K(x, r) \subset A$
 (wegen (1.6))



- B12 Im metrischen Raum $\mathbb{R}$ sei $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
Es ist $\overset{\circ}{A} = \emptyset$:



Für kein n und kein $r > 0$ ist $K(\frac{1}{n}, r) \subset A$.

- A26 Suchen Sie in $\mathbb{R}$ den offenen Kern von

$$A = \{1\}$$

$$B = [0, 1]$$

$$C =]0, 1[$$

$$D = \emptyset$$

$$E = \mathbb{R}$$

Bemerkung: In B12 und in A26 soll wie immer im Folgenden auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ die natürliche Topologie gegeben sein. Nur Ausnahmen werden eigens vermerkt.

- A27 Geben Sie eine anschauliche Deutung des offenen Kerns einer beliebigen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

- A28 In X sei die diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

gegeben. Es sei $x_0 \in X$.

a) Berechnen Sie $K(x_0, 1)$, $\overline{K(x_0, 1)}$ und $\overline{K(x_0, 1)}$.

b) Lösen Sie Aufgabe a) entsprechend in $(\mathbb{R}, d_n)$.

c) Welche Beziehung besteht demnach in metrischen Räumen zwischen $K(x, r)$, $\overline{K(x, r)}$ und $\overline{K(x, r)}$?

Zwei einfache Folgerungen seien der Vollständigkeit halber erwähnt:

- (3.4) a) A ist eine offene Menge $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$
b) A ist offen $\Leftrightarrow A$ ist Umgebung aller Elemente von A .

Der Beweis ist jeweils trivial.

(3.2.a) und (3.4.b) stellen übrigens den Zusammenhang zwischen den gleichwertigen Axiomensystemen der offenen Mengen und der Umgebungen her (siehe etwa Schubert ¹⁾). Die Gründe, die eine Verifikation nicht geraten erscheinen lassen, wurden bereits genannt (s.S. 69). Das Verständnis für den Umgebungsbegriff muss jedoch weiter gefestigt werden.

Wir führen eine nützliche Schreibweise ein:

Bezeichnet man die Menge aller Umgebungen eines Punktes a mit $\mathcal{U}(a)$, so kann man statt

V ist Umgebung von a (x)
einfach schreiben
 $V \in \mathcal{U}(a)$ (xx)

Es ist nicht notwendig, für $\mathcal{U}(a)$ die Bezeichnung "Umgebungsfilter" einzuführen. Man sollte analog zu der für offene Mengen vorgeschlagenen Regelung verfahren (s. S. 63). (x) ist für den mündlichen Gebrauch, (xx) für die schriftliche Notierung geeignet.

- A29 Geben Sie in $(X, \mathcal{V})$ mit $X = \{a, b, c, d\}$
und $\mathcal{V} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$
alle Umgebungen von a an.

¹⁾ Schubert, Litverz. Nr. (14) S. 14

A30 In $X = \{u, v, w\}$ sei

$$\mathcal{U}(u) = \{\{u\}, \{u, v\}, \{u, w\}, X\}$$

$$\mathcal{U}(v) = \{\{u, v\}, X\}$$

$$\mathcal{U}(w) = \{\{u, w\}, X\}.$$

Suchen Sie eine Topologie auf X , die diese Umgebungen erzeugt.

A31 Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen in $\mathbb{R}$ Umgebungen des Punktes 1 sind.

a) $U_1 = \{1\}$

b) $U_2 = \mathbb{N}$

c) $U_3 = \mathbb{Q}$

d) $U_4 = [1, 2]$

e) $U_5 =]0, 2[$

f) $U_6 = [0, 2]$

Einige weitere Eigenschaften der Umgebungen bzw. der Umgebungsfilter seien in einem Satz zusammengefasst. Der Beweis ist jeweils sehr einfach und daher sehr gut als Übungsaufgabe geeignet:

(X, τ) top. Raum, $x \in X$, $U, V \subset X$

(3.5) a) $x \in X \implies \mathcal{U}(x) \neq \emptyset$

b) $U \in \mathcal{U}(x) \implies x \in U$

c) $U \in \mathcal{U}(x) \wedge U \subset V \implies V \in \mathcal{U}(x)$

d) $U, V \in \mathcal{U}(x) \implies U \cap V \in \mathcal{U}(x)$

Beweis: a) X ist Umgebung von x wegen $x \in \underbrace{X}_{\in \tau} \subset X$

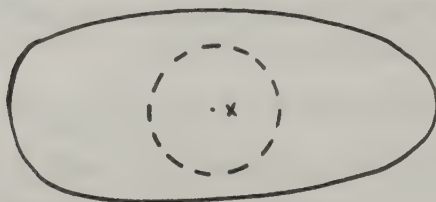
b) $U \in \mathcal{U}(x) \implies \bigvee_{B \in \tau} x \in B \subset U \implies x \in U$

c) $U \in \mathcal{U}(x) \wedge U \subset V \implies \bigvee_{B \in \tau} x \in B \subset U \subset V$

$\implies x \in B \subset V \implies V \in \mathcal{U}(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } U, V \in \mathcal{U}(x) & \implies \bigvee_{B, C \in \mathcal{T}} x \in B \subset U \wedge x \in C \subset V \\
 & \implies x \in B \cap C \subset U \cap V \\
 & \implies U \cap V \in \mathcal{U}(x) \\
 & \text{denn es ist } B \cap C \in \mathcal{T} \quad (\text{T4}).
 \end{aligned}$$

Alle Einzelbeweise lassen sich durch die bereits vorgestellte nützliche Skizze nahezu erledigen:



Aufgaben

- 1) $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}, X\}$
 - a) Suchen Sie die offenen Kerne der Mengen
 $A = \{a, b\}$ $B = \{a, c\}$ $C = \{c, d\}$
 - b) Ermitteln Sie zu allen Elementen von X jeweils alle Umgebungen.
 - c) Lässt sich die Topologie $\mathcal{T}$ so verändern, dass die Umgebungen konstant bleiben?
- 2) Geben Sie in $\mathbb{R}^2$ den offenen Kern der Menge
 $A = \{(x, y) : y+2x \leq 3 \wedge y-x < 3 \wedge x < 3\}$ an.
- 3) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist
 $\therefore \mathcal{T}(X) \xrightarrow{\quad} \mathcal{T}$
 $A \xrightarrow{\quad} \mathbb{A}$
 eine Abbildung.
 Ist die Abbildung umkehrbar?

- 4) Zeigen Sie: eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist zu keiner reellen Zahl x Umgebung (sie besitzt keinen inneren Punkt).
- 5) Zeigen Sie: $U \in \mathcal{U}(x) \implies X \setminus U \notin \mathcal{U}(x)$
- 6) Ist die Behauptung
"Ist U Teilmenge eines topologischen Raumes,
so ist entweder U oder $X \setminus U$ Umgebung wenigstens
eines Punktes von X "
richtig?
- 7) Zeigen Sie: Die Menge der Umgebungen eines
Punktes a eines top. Raumes (X, τ) ist keine
Topologie auf X , sie erfüllt jedoch drei der
vier Topologeeigenschaften (s. (2.1)).

§ 4 Abgeschlossene Mengen

Für eine Behandlung der abgeschlossenen Mengen spricht:

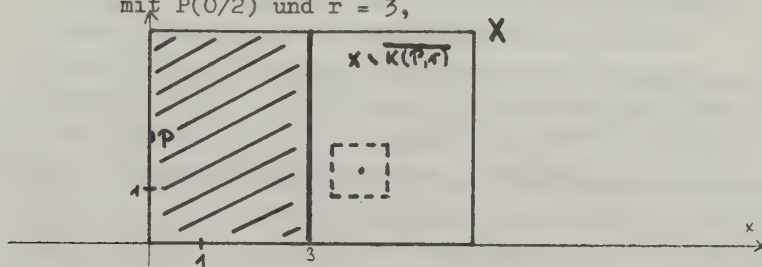
- 1) Will man im weiteren Verlauf auf kompakte und zusammenhängende Mengen eingehen, so werden Definition und Veranschaulichung durch den Begriff der abgeschlossenen Mengen erheblich vereinfacht.
- 2) Mit sehr wenig Zeitaufwand kann ein zweites Axiomensystem vorgestellt werden, auf dem ebenfalls die gesamte Topologie aufgebaut werden kann.
- 3) Der Umgang mit Mengenmengen erfordert sicher einen grossen Aufwand von Übungen. Durch die Verlagerung auf ein neues Feld ist dafür eine bessere Motivation gegeben.
- 4) Der Rand einer Menge ist bei offenen Mengen (anschaulich) stets ausgeklammert worden; verständlich, dass man mehr über diesen Begriff wissen möchte. Einigermassen sinnvoll lässt er sich nur über den Abschluss von Mengen und die Berührungspunkte definieren.
- 5) Berührungspunkte spielen eine grosse Rolle bei der Definition des Grenzwerts.

Zur Definition greift man wieder auf die anschaulich besser fassbaren metrischen Räume zurück. Dort hat man auch bereits ein Beispiel für abgeschlossene Mengen vorliegen:

$$\begin{aligned} \text{Die abgeschlossenen Kugeln } \overline{K(x_0, r)} \\ \overline{K(x_0, r)} = \{x: d(x, x_0) \leq r\} \end{aligned}$$

Ein spezielles Beispiel macht deutlich, worauf man hinaus will:

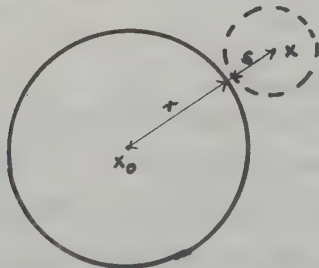
B13 Sei $X = [0,4] \times [0,6] \subset \mathbb{R}^2$
 und $d(P,Q) = \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$.
 Zeichnet man die abgeschlossene Kugel $\overline{K}(P,r)$
 mit $P(0/2)$ und $r = 3$,



so sieht man: $X \setminus \overline{K}(P,r)$ ist offen!

Dasselbe gilt sichtlich auch für andere abgeschlossene Kugeln in X .

Auch die Skizze einer abgeschlossenen Kugel bei der natürlichen Metrik



stützt die Vermutung:

Das Komplement einer abgeschlossenen Kugel in einem metrischen Raum ist offen.

Die Skizze unterstützt darüber hinaus auch die Verifikation der Vermutung.

Zu zeigen ist:

$$x \in X \setminus \overline{K(x_0, r)} \quad \Rightarrow \quad \bigvee_{s>0} K(x, s) \subset X \setminus \overline{K(x_0, r)}$$

m.a.W.

$$x \notin \overline{K(x_0, r)} \quad \Rightarrow \quad \bigvee_{s>0} K(x, s) \cap \overline{K(x_0, r)} = \emptyset$$

Die Skizze zeigt, wie s zu wählen ist:

$$0 < s \leq d(x, x_0) - r$$

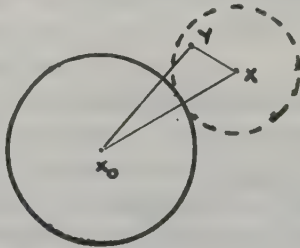
also etwa $s = d(x, x_0) - r$

Es ist $K(x, s) \cap \overline{K(x_0, r)} = \emptyset \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y \in K(x, s) \Rightarrow y \notin \overline{K(x_0, r)} \quad \Leftrightarrow \quad (!)$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) < s \Rightarrow d(x_0, y) > r$$

Der Beweis dieser Implikation benötigt die Dreiecksungleichung. Das wird durch eine erneute Skizze provoziert:



Es ist $d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0)$

und man weiss schon: $d(x, y) < s = d(x, x_0) - r$

Zusammen: $d(x, x_0) < d(x, x_0) - r + d(y, x_0)$

$$\Leftrightarrow 0 < -r + d(y, x_0)$$

$$\Leftrightarrow r < d(y, x_0) \quad \text{q.e.d.}$$

Der Beweis ist trotz seines erheblichen Umfanges recht einfach, da er fast nur triviale Umformungen verlangt. Die notwendigen Ideen liefern die eingestreuten Skizzen fast zwangsläufig.

Bemerkung: An der Stelle (!) bietet sich als völlig gleichwertig der indirekte Schluss

$$y \in \overline{K(x_0, r)} \implies y \notin K(x, s)$$

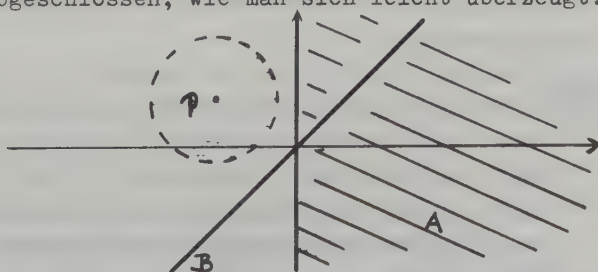
an. Er verläuft fast analog.

Wie in (1.6) verwendet man nun die eben nachgewiesene (topologische) Eigenschaft abgeschlossener Kugeln zur Definition einer grösseren Klasse von Mengen, die man entsprechend "abgeschlossene" Mengen nennt:

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $A \subset X$

(4.1) A heisst abgeschlossen $\iff X \setminus A \in \mathcal{T}$

B14 In $\mathbb{R}^2$ sind $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$ und $B = \{(x, y) : x = y\}$ abgeschlossen, wie man sich leicht überzeugt:



Die Skizze ist hier als Beweismittel vollständig ausreichend. Ein exakter Beweis sollte jedoch vielleicht in einem Fall durchgeführt werden, da er zeigt, dass nicht trivial sein muss, was so aussieht:

A32 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^+ = \{(x, y) : x > 0, y = 0\}$ in $\mathbb{R}^2$ nicht abgeschlossen ist (exakter Nachweis!)

In endlichen topologischen Räumen bewirkt die Definition (4.1) Verblüffendes:

B15 In $X = \{a, b, c\}$ ist $\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X \}$ eine Topologie.

Die Komplemente der offenen Mengen sind dann abgeschlossen (warum?):

$$X, \{a, c\}, \{b\}, \emptyset$$

Die offenen Mengen sind also gleichzeitig auch die abgeschlossenen!

Bei $\mathcal{T}_2 = \{ \emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X \}$ ist das anders. Hier sind abgeschlossen

$$X, \{a, b\}, \{b\}, \emptyset$$

Einigen Schülern wird sicher auffallen, dass die "Systeme" abgeschlossener Mengen¹⁾ im Beispiel offensichtlich die Eigenschaften von Topologien haben. Diese "Erkenntnis" kann man nun zur Probe einigen Tests unterziehen, die bei endlichen Mengen alle positiv verlaufen:

A33 Geben Sie eine Topologie $\mathcal{T}_1$ auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$ an und suchen Sie alle abgeschlossenen Mengen (bezüglich $\mathcal{T}_1$) in X . Gibt es eine Topologie $\mathcal{T}_2$ auf X , bezüglich der $\mathcal{T}_1$ gerade das System abgeschlossener Mengen ist?

A34 Wieviele Systeme abgeschlossener Mengen gibt es auf $X = \{1, 2\}$?

¹⁾ Auf diese Weise wird hier und im Folgenden die "Menge aller abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum" etwas abkürzend beschrieben. Eine allgemein gebräuchliche kürzere Formulierung gibt es nicht.

Es ist nun an der Zeit, den eben begangenen Trugschluss zu entlarven, bevor er sich zu sehr festgesetzt hat. Man ist jedoch leider in der unglücklichen Lage, dass ein Gegenbeispiel in endlichen Mengen nicht gegeben werden kann und man auf unendliche Räume angewiesen ist. Zudem wird die Verifikation nicht gerade einfach sein. Man kann trotzdem nicht darauf verzichten.

Das einfachste Beispiel wäre sicher die co-endliche Topologie, für die es aber vor der Ableitung der Eigenschaften der Systeme abgeschlossener Mengen kaum eine Motivation gibt.

Der beste Weg scheint deshalb der zu sein, sich zuerst um die Eigenschaften der Systeme abgeschlossener Mengen zu kümmern, sie mit denen von Topologien zu vergleichen und den erkennbaren Unterschied, der zunächst gar nicht gewichtig zu sein scheint, an Beispielen zu verdeutlichen. Auf diese Weise wird auch deutlich, warum die Betrachtung endlicher topologischer Räume irreführen musste.

Mithilfe der Gesetze von de Morgan sieht man leicht:

X Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$	
(4.2) Es gibt eine Topologie τ auf X, zu der $\mathcal{A}$ das System abgeschlossener Mengen ist	
$\Leftrightarrow$	
(A1)	$X \in \mathcal{A}$
(A2)	$\emptyset \in \mathcal{A}$
(A3)	$B \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{A}$
(A4)	$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Man weiß: $\mathcal{A}$ ist das System abgeschlossener Mengen zu einer Topologie τ

$\Leftrightarrow$

$\tau = \{X \setminus B : B \in \mathcal{A}\}$ ist eine Topologie, denn in $\mathcal{A}$ liegen genau die Komplemente der Mengen aus τ und umgekehrt (wegen 4.1).

Man kann also anstelle von (4.2) auch zeigen:

$\mathcal{A}$ hat die Eigenschaften (A1) - (A4) $\Leftrightarrow$

$\tau = \{X \setminus B : B \in \mathcal{A}\}$ ist eine Topologie.

Der Beweis verläuft in beiden Richtungen völlig analog; es wird deshalb nur eine Richtung ausführlich dargestellt.

" $\Leftarrow$ " Die Menge τ soll die Topologieaxiome (T1) - (T4) erfüllen. Zu verifizieren sind die Eigenschaften (A1) - (A4) für die Menge $\mathcal{A}$.

$$(A1) \quad X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus X = \emptyset \in \tau \quad (T1)$$

$$(A2) \quad \emptyset \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus \emptyset = X \in \tau \quad (T2)$$

$$(A3) \quad \text{Es sei } \mathcal{L} \subset \mathcal{A} \xrightarrow{!} \bigcap_{B \in \mathcal{L}} B \in \mathcal{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L} = \{X \setminus B : B \in \mathcal{L}\} \subset \tau$$

$$T3 \quad \Downarrow$$

$$\bigcup_{B \in \mathcal{L}} X \setminus B \in \tau \quad \xrightarrow{\text{(de Morgan)}} \quad X \setminus \bigcap_{B \in \mathcal{L}} B \in \tau$$

Einfacher - aber prinzipiell analog - weist man (A4) nach:

$$\text{Es seien } A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad X \setminus A, X \setminus B \in \tau$$

$$\Rightarrow \quad X \setminus A \cap X \setminus B = X \setminus (A \cup B) \in \tau$$

$$\Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$$

Bemerkung: Es ist günstig, das Ergebnis (4.2) nicht vorzugeben. Ziel einer Unterrichtsstunde könnte es sein, (A1) - (A4) aus den Topologieeigenschaften

(T1) - (T4) herzuleiten. Diese recht offene Aufgabenstellung sollte in der Regel ausreichen, um die richtigen Lösungen zu ermöglichen. Notfalls kann man durch geeignete Impulse steuernd eingreifen ¹⁾).

A35 Zeigen Sie, dass alle Topologien auf einer endlichen Menge X auch Systeme abgeschlossener Mengen auf X sind und umgekehrt.

A36 X sei eine beliebige Menge.
In welchem Fall ist $\alpha = \{A: A \text{ ist endlich}\}$ ein System abgeschlossener Mengen auf X ?
Wie wäre α im anderen Falle abzuändern?
Bilden Sie die zu α gehörige Topologie!

Für unendliche Mengen X hat man mit $\alpha' = \alpha \cup \{X\}$ ein System abgeschlossener Mengen vorliegen, das keine Topologie ist:

Sei etwa $X = \mathbb{N}$, so gilt für jede natürliche Zahl n :

$$\{n\} \in \alpha'$$

Also $\mathcal{B} = \{\{2n\}: n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha'$

aber $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \{2n: n \in \mathbb{N}\} \notin \alpha'$

denn die Menge ist weder endlich noch mit $\mathbb{N}$ identisch.

Die zu α' gehörige Topologie

$$\tau_c = \{B: X \setminus B \text{ ist endlich oder } B = \emptyset\}$$

ist umgekehrt kein System abgeschlossener Mengen auf einer unendlichen Menge X . Sie wird, da sie noch einige Male Bedeutung erlangen wird, mit einem speziellen Namen versehen:

τ_c heisst die co-endliche Topologie auf X

¹⁾ Zu dieser Thematik findet sich in IV.3 eine Arbeitskarte (A16 S. 292)

A37 Prüfen Sie, ob in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_c)$ die folgenden Mengen offen (bzw. abgeschlossen) sind:

$$A = \{x: x < 1000000000\}$$

$$B = \{x: x > 1000000000\}$$

$$C = \{x: x \text{ ist keine Primzahl}\}$$

$$D = \{x: x = 10 \cdot n + 3 \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

Auch in $\mathbb{R}$ gibt es Beispiele, die überschaubar genug sind, um den Unterschied zwischen Systemen abgeschlossener Mengen und Topologien zu verdeutlichen:

A38 a, b, c, d seien reelle Zahlen mit

$$a < 0 < b < c < 3 < d.$$

a) Vereinigen Sie alle offenen Intervalle $]b, c[$

b) Vereinigen Sie alle abgeschlossenen Intervalle $[b, c]$.

c) Schneiden Sie alle offenen Intervalle $]a, d[$.

d) Schneiden Sie alle abgeschlossenen Intervalle $[a, d]$.

Aufgaben

1.) Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ ist eine Vereinigung offener Intervalle (s. (1.8)).

Jede abgeschlossene Menge ($\neq \mathbb{R}$) lässt sich demnach darstellen als Komplement einer Vereinigung offener Intervalle oder (de Morgan) als Durchschnitt von Komplementen offener Intervalle.

Stellen Sie auf diese Weise die abgeschlossenen Mengen $\emptyset$, $\{1\}$ und $[0, 1]$ dar.

2.) Ist in $\mathbb{R}^2$ die Menge

$$A = \{(x,y): y = x^2\}$$

abgeschlossen?

3.) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ bei der natürlichen Topologie die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen weder abgeschlossen noch offen ist.

Suchen Sie die kleinstmögliche Topologie auf $\mathbb{R}$, bei der $\mathbb{Q}$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

4.) Sei $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{u\}, \{v, w\}, \{u, v, w\}, \{t, u, v, w\}\}$.

Geben Sie eine Menge X so an, daß $\mathcal{A}$ die Eigenschaften eines Systems abgeschlossener Mengen auf X hat (s. 4.2). Wieviele Teilmengen von $\mathcal{A}$ erfüllen ebenfalls diese Eigenschaften?

Konstruieren Sie jeweils die zugehörige Topologie auf X .

5.) Zeigen Sie, dass auf endlichen Mengen X die co-endliche Topologie mit der diskreten zusammenfällt.

6.) Es sei $A_n =]-n, n[$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{A} = \{A_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ enthält also nur offene Mengen.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein System abgeschlossener Mengen und eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.

§ 5 Rand und abgeschlossene Hülle einer Menge

Analog zur Konstruktion des offenen Kerns einer Menge kann man nun versuchen, zu einer vorgegebenen Menge eine "bestmöglich angenäherte" abgeschlossene Menge zu finden. Die starke Analogie zu den Überlegungen in § 3 ist dabei eine große Hilfe. Die Begründung für die Aufnahme der Begriffe "Rand" und "abgeschlossene Hülle" in diesen Kurs wurde bereits an anderer Stelle gegeben.

Das einführende Beispiel aus § 3 kann wieder verwendet werden:

B16 $A = \{x: 0 < x < 1\}$ ist in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Ebenso wie in B11 entnimmt man einer Skizze von A , daß eine kleinste abgeschlossene Obermenge durch das abgeschlossene Intervall

$$[0,1] = A \cup \{0\}$$

sofort angegeben werden kann, daß aber eine größte abgeschlossene Teilmenge vermutlich nicht existiert: eine solche müßte wohl (anschauliche Argumentation)

die Gestalt $[b,1]$ mit $0 < b$

haben. Die "bestmögliche Annäherung" würde dann durch die kleinste positive reelle Zahl b erreicht - eine solche Zahl gibt es aber nicht.

Durch diese anschaulichen Vorüberlegungen ist die Definition vorbereitet (auch wenn die Existenz einer solchen Menge noch nicht sichergestellt wurde).

(X, τ) top. Raum, $A \subset X$.

(5.1) Die kleinste abgeschlossene Obermenge von A heißt die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von A .

Eine weitergehende Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle wird nun - entsprechend zu den Überlegungen in § 3 (S. 71) - zum Durchschnitt der abgeschlossenen Obermengen von A führen:

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{a}} B$$

was jedoch wiederum kaum praktische Bedeutung hat.²⁾

Man kann daraus aber recht einfach eine brauchbare Formel für die Ermittlung der abgeschlossenen Hülle erhalten¹⁾.

$$(5.2) \quad X \setminus \bar{A} = X \setminus^{\circ} A$$

Die Konstruktion abgeschlossener Hüllen ist damit auf das Problem der offenen Kerne zurückgespielt, das ja bereits ausführlich behandelt wurde. Ein kleiner Umweg ist allerdings noch erforderlich:

B17 Es sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{a} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, X\}$

$$A = \{3, 4\} \quad \Rightarrow \quad X \setminus A = \{1, 2\}$$



$$\bar{A} = \{2, 3, 4\} \quad \Leftarrow \quad X \setminus^{\circ} A = \{1\} = X \setminus \bar{A}$$

A39 Es sei $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$.

Geben Sie den offenen Kern und die abgeschlossene Hülle von A an, wenn X mit der diskreten (bzw. der trivialen) Topologie versehen ist.

¹⁾ Die Formel wird in einer Unterrichtseinheit ausführlich hergeleitet (s. S. 248)

²⁾ Das kann man ähnlich wie beim offenen Kern begründen (s. S. 71)

A40 Suchen Sie die abgeschlossene Hülle der Menge
 $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ im topologischen Raum $\mathbb{R}$.

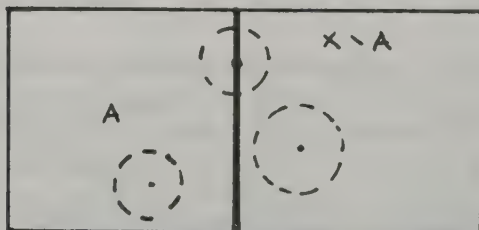
Die Formel (5.2) ist ersichtlich besonders in endlichen Räumen nützlich. In Analogie zu § 3 kann man nun noch versuchen, eine Beschreibung der Punkte der abgeschlossenen Hülle einer Menge zu geben. In Übereinstimmung mit der Anschauung gibt man ihnen gleich einen Namen:

(5.3) Die Punkte der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ einer Menge A nennt man die Berühr(ungs)punkte von A .

Einen Ansatz zu ihrer topologischen Beschreibung liefert wiederum (5.2):

$$x \in \bar{A} \iff x \notin X \setminus A^\circ$$

$$\iff x \text{ ist kein innerer Punkt von } X \setminus A \quad (+)$$



Aus dieser Skizze motiviert man auch sofort die übliche Definition der Berührungspunkte:

$$x \notin \bar{A} \iff \bigvee_{U \in \mathcal{U}(x)} U \cap A = \emptyset$$

Die logische Negation liefert

$$(5.4) \quad x \in \bar{A} \iff \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(x)} U \cap A \neq \emptyset$$

(5.4) zeichnet sich vor (+) lediglich durch die positivere Art der Formulierung aus, dürfte jedoch von der Handhabung und von der mnemotechnischen Seite her mehr Schwierigkeiten verursachen.

B18 In $\mathbb{R}^2$ ist die abgeschlossene Hülle einer offenen Kugel $K(P,r)$ die abgeschlossene Kugel $\overline{K(P,r)}$.



In diesem Fall argumentiert man am besten - wie meist bei der Konstruktion von Kernen und Hüllen in $\mathbb{R}^n$ - anschaulich. Der exakte Nachweis ist oft nicht ganz einfach. Er soll hier nur kurz angedeutet werden:

Es ist $\mathbb{R}^2 \setminus K(P,r) = \{Q: d(P,Q) \geq r\} = B$
innere Punkte von B können nur Punkte von B selbst sein.

1. Fall: $d(P,Q) > r$

$$\implies Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K(P,r)} \subset B$$

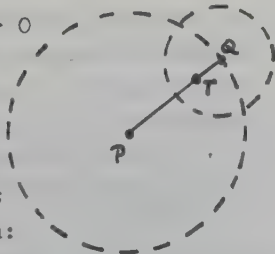
$\mathbb{R}^2 \setminus \overline{K(P,r)}$ ist offen

$\implies Q$ ist innerer Punkt von B

$\implies Q$ ist kein Berührungspunkt von $K(P,r)$

2. Fall: $d(P,Q) = r$. Sei $s > 0$

Ein Punkt auf der Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$, der sowohl in $K(P,r)$ als auch in $K(Q,s)$ liegt, lässt sich leicht angeben:



Der Punkt T lässt sich etwa so bestimmen:

$$x_t = x_q + \frac{s}{2r}(x_p - x_q), \quad y_t = y_q + \frac{s}{2r}(y_p - y_q)$$

Nicht immer ist das Verhältnis zwischen offenen und abgeschlossenen Kugeln so einfach zu bestimmen:

- A41** a) X sei mit der diskreten Metrik versehen. Berechnen Sie zu $x \in X$ die Mengen $K(x, 1)$, $\bar{K}(x, 1)$ sowie die abgeschlossene Hülle von $K(x, 1)$.
- b) Zeigen Sie: Die abgeschlossene Hülle einer offenen Kugel ist immer in der entsprechenden abgeschlossenen Kugel enthalten, aber nicht umgekehrt.
- c) U sei die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Zeigen Sie, daß in $U \setminus \{3\}$ (mit der natürlichen Metrik) die abgeschlossene Kugel $\bar{K}(1, 2)$ zwar eine offene Menge, aber keine offene Kugel ist.

Hier ergeben sich also erstmals Schwierigkeiten mit der gewählten Symbolik. Der Hinweis darauf, daß Bezeichnungen sinnvollerweise nicht ganz beliebig gewählt werden können (hätte man vielleicht die Kugeln etwas glücklicher benennen können?), macht die Behandlung des obigen Details wertvoll.

A42 Suchen Sie in $\mathbb{R}$ alle Berührungspunkte von

- a) $\mathbb{N}$ b) $[a, b]$ c) $]a, b[$ d) $\emptyset$

Die Analogie zwischen den Sätzen zum offenen Kern und zur abgeschlossenen Hülle kann noch weiter fortgesetzt werden. Den Anstoß dazu gibt eine Gegenüberstellung:

$\overset{\circ}{A}$ ist die grösste offene Teilmenge von A	$\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A
$x \in \overset{\circ}{A} \iff x$ ist innerer Punkt von A	$x \in \bar{A} \iff x$ ist Berührungspunkt von A

weiter:

$A = \overset{\circ}{A} \iff A \text{ offen}$	
	$X \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{X \setminus A}$

Ohne Schwierigkeiten kann man vervollständigen:

$$(5.5) \quad A = \bar{A} \iff A \text{ ist abgeschlossen}$$

und

$$(5.6) \quad X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$$

Der Nachweis von (5.5) ist trivial, für (5.6) braucht man eine kleine Idee:

$A = X \setminus B$	$X \setminus A = B$
---------------------	---------------------

X

Es ist bekanntlich $X \setminus \bar{B} = \overset{\circ}{X \setminus B}$

$$\text{also} \quad X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \overset{\circ}{A}$$

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$$

A43 a) Zeigen Sie: $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$ und $\overline{\overset{\circ}{A}} = \bar{A}$.

b) Welche Bedingung muss eine Menge A erfüllen, damit $\bar{A} = \overset{\circ}{A}$ ist?

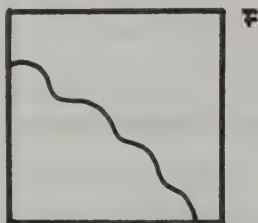
In jedem nicht leeren topologischen Raum gibt es mindestens zwei solche Mengen. Welche?

Der Begriff des Randes einer Menge hat schon einmal bei Veranschaulichungen eine Rolle gespielt. Gewisse Bedeutung wird er wieder bei der Behandlung der zusammenhängenden Räume erlangen. In A43 hat man die Bedingung für nicht zusammenhängende Räume bereits vorliegen, sodass sich diese Stelle anbietet, eine exakte Definition des Randes zu erarbeiten. Eine zwingende Notwendigkeit besteht jedoch nicht.

Der Versuch, beispielsweise eine Quadratfläche F in $\mathbb{R}^2$ in zwei disjunkte Mengen zu zerlegen, die beide offen sind, läßt wohl nur die Lösung

$$F = \emptyset \cup F$$

zu. Man kann an dieser Stelle allerdings nur der Anschauung entnehmen, daß jede nichtleere echte Teilmenge von F einen "Rand" in F besitzt. Erst in (11.6) wird das wirklich bewiesen werden.



Ausgehend von dieser Veranschaulichung gelangt man sehr einfach zu einer Definition der Randpunkte:

Ein Randpunkt ist weder innerer Punkt von A (1)
noch innerer Punkt von $X \setminus A$ (2)

(2) läßt sich sofort übersetzen:

Ein Randpunkt ist Berührungspunkt von A ($x \in \bar{A}$)
entsprechend:

Jeder Randpunkt ist Berührungspunkt von $X \setminus A$ ($x \in \overline{X \setminus A}$)

Das erhebt man zur Definition:

(X, τ) top. Raum, $A \subset X$, $x \in X$

(5.7) a) x heisst Randpunkt von A $\Leftrightarrow$

$$x \in \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

b) Der Rand von A ist die Menge der Randpunkte von A :

$$\text{Rd}(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

Die konkrete Ermittlung des Randes einer vorgegebenen Menge ist nach dem Vorhergehenden nicht mehr von besonderem Interesse, da ja wieder nur abgeschlossene Hüllen gebildet werden müssen. Ihr kommt auch für das Folgende keine grössere Bedeutung zu, sodass sie ohne weiteres zurückgestellt werden kann (im Aufgabenteil sind einige Übungen angegeben). Interessanter ist vermutlich die Frage, ob die Definition tatsächlich das leistet, was mit ihr beabsichtigt war, nämlich die Klassenzerlegung eines topologischen Raumes in zwei offene Mengen und den Rand einer Menge:

$$X = \overset{\circ}{A} \cup \text{Rd}(A) \cup \overset{\circ}{X \setminus A}$$

$$\text{und } \overset{\circ}{A} \cap \text{Rd}(A) = \text{Rd}(A) \cap \overset{\circ}{X \setminus A} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{X \setminus A} = \emptyset$$

Als unmittelbare Folgerung davon ergibt sich dann, dass auch die anschauliche Vorstellung durch (5.7) voll berücksichtigt wird:

$$\overset{\circ}{A} \cup \text{Rd}(A) = \bar{A} \quad \text{und} \quad \bar{A} \setminus \text{Rd}(A) = \overset{\circ}{A}$$

Die einzelnen Beweise eignen sich sehr gut für Übungsaufgaben. Wichtigstes Beweismittel sind die Formeln (5.2) und (5.6).

Aufgaben

- 1) Ist eine Menge eindeutig bestimmt, wenn man ihren offenen Kern und ihre abgeschlossene Hülle kennt?

- 2) $\mathbb{N}$ sei jeweils mit einer der Topologien

a) $\tau_t = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$

b) $\tau_d = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

c) τ_c (co-endliche Top.)

versehen.

Bilden Sie in jedem der drei Fälle offenen Kern, abgeschlossene Hülle und Rand der Mengen

$A = \{x: x < 101\}$

$B = \{x: x = 2n \wedge n \in \mathbb{N}\}$

- 3) Geben Sie auf $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ eine Topologie so an, dass die abgeschlossene Hülle von $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ die Menge $\bar{A} = \{1, 7, 8, 9, 5, 3, 2\}$ ist.

- 4) Die Menge $B = \{r, s, t, u\}$ soll den Rand $\text{Rd}(B) = \{s, u, v\}$ besitzen. Suchen Sie einen topologischen Raum (X, τ) , der diese Angaben erlaubt.

- 5) Es ist $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ und $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$. Untersuchen Sie, ob für den Rand einer Menge eine entsprechende Formel gilt.

- 6) Welche Bedingung muss eine Menge erfüllen, deren Rand leer ist?

- 7) Zeigen Sie: $\text{Rd}(A) = \text{Rd}(X \setminus A)$.

Kapitel II

STETIGE ABBILDUNGEN

In Kapitel I wurden alle grundlegenden Begriffe (und ein paar mehr) eingeführt, die zur Definition und Anwendung der stetigen Abbildungen nötig sind. Stetige Abbildungen sind bekanntlich die Morphismen in der Kategorie der topologischen Räume; in der topologischen Theorie kommt ihnen also eine zentrale Stellung zu. Dieser Gedanke, der auf den ersten Blick kaum Bezug zur Schulpraxis zu haben scheint, wird uns im Gegenteil den Begriff der Stetigkeit in sehr einsichtiger Weise erschliessen.

Der klassische Analysisunterricht hat ja die Schwierigkeit, mit einer Definition arbeiten zu müssen (Epsilon-Lontik!), die häufig erhebliche Motivationsprobleme mit sich bringt und - wohl auch deshalb - nur schwer im Einzelfall verifiziert werden kann. Als Folge davon begnügt man sich nur zu oft mit plausiblen Erklärungen ("Funktionen sind stetig, wenn ihr Graph in einem Strich gezeichnet werden kann" o.ä.), die höchstens als motivierende Anschauungshilfen gerechtfertigt sind und eine tiefere Einsicht eher verhindern.

Im Gegensatz dazu werden wir eine sehr einfache, im konkreten Fall leicht verifizierbare und für den Schüler gut motivierte Definition erhalten, auf deren Grundlage die Analysis in der Schule in grundlegend neuer Weise behandelt werden kann. Es wird gezeigt werden, dass mit dieser Definition alle für den Unterricht an Gymnasien relevanten stetigen Funktionen behandelt werden können und sie als Grundlage für die Behandlung der weiteren Grundbegriffe der Analysis (Grenzwert von Funktionen und Folgen, Differenzierbarkeit) dienen kann. Auf diese Weise wird ein Vorschlag von Pickert¹⁾, die Stetigkeit zum Ausgangspunkt eines Kurses über Analysis zu machen, wieder aufgegriffen und aktualisiert. Man hat an dieser Stelle auch die Möglichkeit, den Schülern die Vorteile topologischer Betrachtungsweise sehr eindrucks-

¹⁾ s. (34) Litverz.

voll zu demonstrieren. Es soll damit freilich nicht der Eindruck erweckt werden, als könne man auf die Epsilon= tik völlig verzichten. Sie wird vielmehr in Folge des Überganges von der globalen zur punkweisen Stetigkeit als eine Möglichkeit der Charakterisierung stetiger Funktionen erarbeitet, auf das man aber im Rahmen der einfachen zu betrachtenden Spezialfälle nicht zurück= greifen muss.

Voraussetzung für einen Erfolg des weiteren Lehrganges ist allerdings eine klare Vorstellung vom Abbildungs= begriff, die erfahrungsgemäss nicht immer in genügend= dem Masse vorausgesetzt werden kann. Da ausserdem noch einige sehr spezielle Eigenschaften von Abbildungen be= nötigt werden, soll an dieser Stelle ein kurzes Kapitel über

Abbildungen

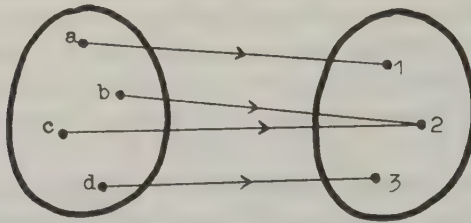
eingeschoben werden. Da es jedoch nicht direkt Bestand= teil des Kurses ist, unterscheidet es sich auch in der äusseren Form von anderen Teilen des Lehrganges: auf didaktische Erläuterungen wurde verzichtet und die Nu= merierungen sind im Zusammenhang mit einem Schülerbuch, das der Arbeit nicht beigelegt ist, zu sehen.

Die häufig verwendete "Definition"

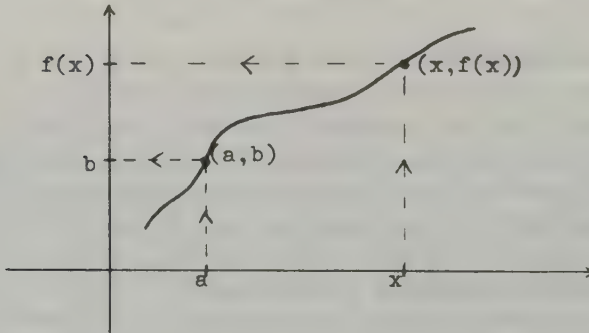
Eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element der Menge Z zuordnet, nennt man eine Abbildung von D in Z

vermag strengen Ansprüchen nicht zu genügen, da sie nicht definierte Begriffe wie Zuordnung und Zuordnungsvorschrift verwendet. Eine exakte Defi= nition gewinnt man aus den Veranschaulichungen von Abbildungen, von denen hier die zwei, die in diesem Kurs benötigt werden, angegeben sind:

a) Das Pfeildiagramm (günstig bei kleinen Mengen)



b) Das kartesische Koordinatensystem (günstig vor allem bei Abbildungen zwischen Zahlenmengen). Die Zuordnungspfeile werden zunächst rechtwinklig eingetragen, bis man erkennt, dass man jeden Pfeil durch seinen Eckpunkt ersetzen kann:



Die Punkte des kartesischen Koordinatensystems, die die "Zuordnung" $x \mapsto f(x)$ beschreiben, haben gerade die Koordinaten $(x, f(x))$.

Der Graph der Abbildung f wird danach festgesetzt als die Menge der geordneten Paare

$$F = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

Eine Abbildung zwischen den Mengen D und Z wird demnach beschrieben durch eine Paarmenge

$$F \subset D \times Z$$

mit den Eigenschaften

$$(G1) \quad \bigwedge_{x \in D} \bigvee_{y \in Z} (x, y) \in F$$

$$(G2) \quad (x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \implies y = z$$

Eine Definition der Abbildung, in der nur wohlbekannte Begriffe verwendet werden, wäre deshalb

(V.11) Eine Abbildung (Synonym: Funktion) f ist ein geordnetes Tripel

$$f = (D, Z, F)$$

von Mengen mit $F \subset D \times Z$, wobei F die Eigenschaften (G1) und (G2) haben muss.

D nennt man die Definitionsmenge,

Z die Zielmenge der Abbildung f .

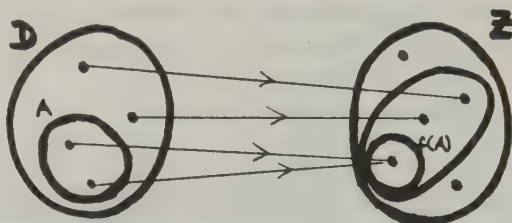
Anstelle von $(x, y) \in F$ schreibt man in bekannter Weise oft

$$f(x) = y$$

Übungsaufgaben mit Pfeildiagrammen oder "Zuordnungsvorschriften" (etwa $f(x) = 2x$) sind leicht selbst herzustellen, weshalb an dieser Stelle darauf verzichtet wird.

Spezielle Eigenschaften von Abbildungen wie Surjektivität und Injektivität ergeben sich bei der Behandlung von § 6, sodass sie auch für den Fall, dass sie nicht bekannt sein sollten, nicht vorweg eingeführt werden müssen.

Zur Illustration der nachfolgenden Definition zieht man am besten ein Pfeildiagramm heran:



(V.12) Ist $f: D \longrightarrow Z$ eine Abbildung, so heisst die Menge

$$f(D) = \{y: \bigvee_{x \in D} (x, y) \in F\} \subset Z$$

Bildmenge von f .

Entsprechend ist für $A \subset D$

$$f(A) = \{y: \bigvee_{x \in A} (x, y) \in F\} \subset Z$$

das Bild der Menge A bei der Abbildung f

Bildmengen lassen sich etwas anschaulicher so schreiben:

$$f(D) = \{f(x): x \in D\} \quad \text{und}$$

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}$$

Die oben verwendete Bezeichnung

$$f: D \longrightarrow Z$$

steht abkürzend für

f ist Abbildung von D in Z .

Sie wird auch in Zukunft häufig eingesetzt werden, wenn Definitions- und Zielmenge einer Abbildung wichtig sind. Die Zuordnungsvorschrift ist dabei sehr anschaulich mit einzubringen:

$$\begin{array}{lcl} \text{etwa} & f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 2x \end{array}$$

Beispiele und Übungsaufgaben sind auch in diesem Fall leicht zu finden.

Für die Bilder von Mengen bei einer Abbildung f gelten folgende Regeln:

- (V.12)
- a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
 - b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
 - d) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

Beweis: a) Bekannt: $x \in A \implies x \in B$ (1)

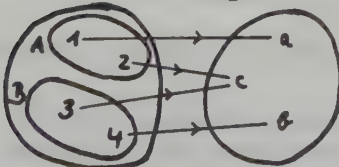
$$y \in f(A) \implies \bigvee_{x \in A} y = f(x)$$

$$\stackrel{(1)}{\implies} \bigvee_{x \in B} y = f(x) \implies y \in f(B)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y \in f(A \cup B) &\iff \bigvee_{x \in A \cup B} y = f(x) \\ &\iff \bigvee_{x \in A} y = f(x) \vee \bigvee_{x \in B} y = f(x) \\ &\iff y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y \in f(A \cap B) &\iff \bigvee_{x \in A \cap B} y = f(x) \\ &\implies \bigvee_{x \in A} y = f(x) \wedge \bigvee_{x \in B} y = f(x) \\ &\iff y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Ein Gegenbeispiel zeigt, dass diese Implikation i.a. nicht umgekehrt werden kann:



es ist $A \cap B = \{3\}$
also $f(A \cap B) = \{c\}$
aber $f(A) \cap f(B) = \{c\}$

$$\begin{aligned} \text{d) } y \in f(A) \setminus f(B) &\iff \bigvee_{x \in A} y = f(x) \wedge \bigwedge_{z \in B} y \neq f(z) \\ &\implies \bigvee_{x \in A \setminus B} y = f(x) \\ &\implies y \in f(A \setminus B) \end{aligned}$$

Dasselbe Gegenbeispiel wie in c) zeigt, dass der Schluss sich nicht umkehren lässt.

Dieses Ergebnis sei - wie das folgende - an dieser Stelle lediglich verzeichnet. Es musste jedoch bereitgestellt werden, da es bei der Übertragung von Topologien eine wichtige Rolle spielt.

Auf Übungsaufgaben kann verzichtet werden.

In Umkehrung zu (V.12) definiert man:

$$f: D \text{ -----} \rightarrow Z, B \subset Z$$

(V.13) Das Urbild von B bei der Abbildung f ist die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}$$

B19 Das Urbild der Zielmenge Z ist die Definitionsmenge D: jedes Element von D wird ja in Z abgebildet.

B20 $f: \mathbb{N} \text{ -----} \rightarrow \mathbb{N}_2$ $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$
 $n \text{ -----} \rightarrow n^2$
 $f^{-1}(A) = \emptyset$ und $f(A) = \{4, 9, 25, 36, 49, 64\}$

A44 Hat das Urbild einer Menge im allgemeinen
a) mehr
b) weniger
c) gleich viel Elemente wie die Menge selbst?

A45 Zeigen Sie an einfachen Beispielen, dass im allgemeinen keine Gleichheit zwischen einer Menge A und $f^{-1}(f(A))$ vorliegt. Es gilt vielmehr:

$$a) A \subset D \implies A \subset f^{-1}(f(A))$$

$$b) B \subset Z \implies f(f^{-1}(B)) \subset B$$

Nachweis!

Die zu (V.12) entsprechenden Regeln lauten:

- (V.13)
- a) $A \subset B \implies \mathbb{F}^1(A) \subset \mathbb{F}^1(B)$
 - b) $\mathbb{F}^1(A \cup B) = \mathbb{F}^1(A) \cup \mathbb{F}^1(B)$
 - c) $\mathbb{F}^1(A \cap B) = \mathbb{F}^1(A) \cap \mathbb{F}^1(B)$
 - d) $\mathbb{F}^1(A \setminus B) = \mathbb{F}^1(A) \setminus \mathbb{F}^1(B)$

Der Beweis wird exemplarisch für b) vorgeführt. In allen anderen Fällen verläuft er entsprechend.

$$\begin{aligned} & x \in \mathbb{F}^1(A \cup B) \\ \iff & f(x) \in A \cup B \\ \iff & f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ \iff & x \in \mathbb{F}^1(A) \vee x \in \mathbb{F}^1(B) \\ \iff & x \in \mathbb{F}^1(A) \cup \mathbb{F}^1(B) \end{aligned}$$

Bemerkung: Das Urbild $\mathbb{F}^1(A)$ einer Menge A darf nicht mit dem Bild der inversen Abbildung g^{-1} zu einer umkehrbaren Abbildung g verwechselt werden.

Ist freilich f umkehrbar, so stimmen $\mathbb{F}^1(A)$ und $f^{-1}(A)$ überein.

Aus der Schreibweise $\mathbb{F}^1(A)$ darf jedoch nicht auf die Existenz einer Umkehrabbildung geschlossen werden.

§ 6 Erzeugung von Topologien

Das mathematische Mittel, um Eigenschaften einer Menge auf eine andere zu übertragen, ist die Abbildung. Diese Erkenntnis drängt sich bei Vorgabe zweier Venndiagramme (eine Menge sei mit einer Topologie versehen) sofort auf. Das führt zu einer

1. Vermutung: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so ergeben die Bilder aller in X offenen Mengen gerade eine Topologie auf Y :

$$\mathcal{T} = \{f(A) : A \in \mathcal{T}\}$$

Der Versuch der Verifikation der Vermutung erscheint, obwohl er faktisch misslingt, dennoch sehr nützlich. Nicht nur, dass sich als Nebenprodukte die so wichtigen Abbildungseigenschaften Injektivität, Surjektivität und Bijektivität ergeben, die möglicherweise noch nicht bekannt sind; es wird auch deutlich demonstriert, dass bei topologischen Abbildungen stets die Urbilder interessanter sind als die Bilder von Mengen. Die Definition der Stetigkeit erhält so ihre Rechtfertigung, die nicht allein auf der erfolgreichen Verifikation der 2. Vermutung beruhen kann.

Da im Anhang¹⁾ eine ausführliche Diskussion der 1. Vermutung gegeben wird, sei an dieser Stelle nur das Ergebnis vermerkt:

¹⁾ s. Unterrichtseinheit 3 (S. 251)

(X, τ) top. Raum, Y Menge, $f: X \longrightarrow Y$

(6.1) f ist bijektiv $\implies$

$$\tau = \{f(A): A \in \tau\}$$

ist eine Topologie auf Y .

Je nach Kenntnisstand der Schüler muss an dieser Stelle mehr oder weniger deutlich darauf abgehoben werden, dass bijektive Abbildungen einen zwar wichtigen, aber relativ seltenen Spezialfall darstellen, weshalb man sich mit dem Ergebnis (6.1) nicht zufriedengeben kann.

Beispiele für bijektive bzw. nicht bijektive Abbildungen lassen sich sehr leicht konstruieren, weshalb hier weitgehend darauf verzichtet werden kann. Wichtig ist die Erkenntnis:

A46

X und Y seien endliche Mengen. Zeigen Sie

- a) Ist $f: X \longrightarrow Y$ injektiv, so hat X genauso viele Elemente wie die Bildmenge $f(X)$ und damit höchstens so viele wie Y .
- b) Ist f surjektiv, so hat Y höchstens so viele Elemente wie X .
- c) Zwischen X und Y gibt es genau dann eine bijektive Abbildung, wenn X und Y gleichviele Elemente haben.

(6.1) lässt also für Topologieübertragungen nur wenige Möglichkeiten offen. Die vorhergehenden Abschnitte über Abbildungen führen zur

2. Vermutung: Ist (Y, τ) ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so ist die Menge

$$\tau = \{f^{-1}(A): A \in \tau\}$$

der Urbilder offener Mengen eine Topologie auf X .

Die Verifikation ist sehr einfach und verläuft diesmal ohne Störungen:

- (T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ wegen $\emptyset = F^{-1}(\emptyset)$ und $\emptyset \in \mathcal{T}$
 (T2) $X \in \mathcal{T}$ wegen $X = F^{-1}(Y)$ und $Y \in \mathcal{T}$
 (T3) Es seien $A_i \in \mathcal{T} \implies \bigvee_{B_i \in \mathcal{T}} A_i = F^{-1}(B_i)$

$$\implies \bigcup_i A_i = \bigcup_i F^{-1}(B_i) = F^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) \in \mathcal{T}$$
 denn es ist natürlich $\bigcup_i B_i \in \mathcal{T}$

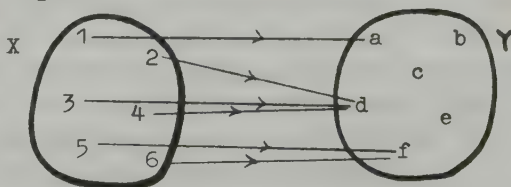
(T4) Wie (T3)

Die zweite Vermutung war also richtig, man kann mit Abbildungen tatsächlich Topologien übertragen:

$(Y, \mathcal{T})$ top. Raum, X Menge, $f: X \dashrightarrow Y$

(6.2) $\mathcal{T} = \{F^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}\}$
 heisst die Initialtopologie (auf X bezüglich f)

B21 Das Pfeildiagramm



veranschaulicht eine Abbildung $f: X \dashrightarrow Y$.

Auf Y sei eine Topologie gegeben:

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}, \{c, f\}, \{c\},$
 $\{a, b, c, f\}, \{c, d, e, f\}, \{a, b, c\}, Y\}$

Die Initialtopologie bezüglich f ergibt sich daraus zu

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 5, 6\},$
 $\{2, 3, 4, 5, 6\}, X\}$

Verschiedene offene Mengen aus $\mathcal{T}$ - z.B. $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$ - haben bei der Abbildung f dasselbe Urbild und erzeugen so dasselbe Element der Initialtopologie.

B22 $\mathbb{Z}$ sei mit der co-endlichen Topologie τ_c versehen. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist die "identische Injektion" von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$.

Die Initialtopologie auf $\mathbb{N}$ ist ebenfalls die co-endliche:

$$A \in \tau \iff \bigvee_{B \in \tau_c} A = \bar{f}^1(B)$$

$$1. \text{ Fall: } B = \emptyset \implies A = \bar{f}^1(B) = \emptyset$$

$$2. \text{ Fall: } \mathbb{Z} \setminus B \text{ ist endlich}$$

$$\begin{aligned} \implies \mathbb{N} \setminus A &= \bar{f}^1(\mathbb{Z}) \setminus \bar{f}^1(B) = \bar{f}^1(\mathbb{Z} \setminus B) \\ &= \{x: f(x) \notin B\} = \{x: x \notin B\} \\ &= \mathbb{N} \setminus B \\ &\text{ist endlich (oder } \emptyset) \end{aligned}$$

A47 $f(x) = 1$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass bezüglich f alle Topologien auf $\mathbb{N}$ dieselbe Initialtopologie haben.

A48 F sei die Menge der konstanten Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (z.B. $f_a(x) = a$).

$$F = \{f_a: a \in \mathbb{R}\}$$

Der Graph der Abbildung f_a sei die Menge $M_a \subset \mathbb{R}^2$ (Veranschaulichung?)

$g(f_a) = a$ ist eine Abbildung von F in $\mathbb{R}$.

Geben Sie die Initialtopologie der natürlichen Topologie bezüglich g an, indem Sie die offenen Mengen in F anschaulich als Vereinigung von Mengen M_a deuten.

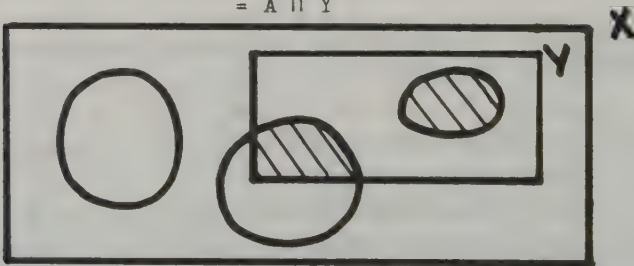
A49 $X = \{a, b, c\}$ $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
 $Y = \{r, s, t, u, v\}$ $\tau = \{\emptyset, \{r\}, \{s, t\}, \{u\}, \{r, s, t\}, \{r, u\}, \{s, t, u\}, \{r, s, t, u\}, Y\}$
 Geben Sie eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ so an, dass τ die Initialtopologie zu τ bezüglich f ist.

Ein einfacher Spezialfall von (6.2) ist die Spurtopologie auf einer Teilmenge eines topologischen Raumes. Die grosse Bedeutung der Spurtopologie wird erst in späteren Kapiteln deutlich werden, man kann aber durchaus schon an dieser Stelle ausführlich auf sie eingehen, da sie entscheidend zur Klärung des etwas unanschaulichen Begriffs der Initialtopologie beiträgt.

Ist $f: Y \xrightarrow{\quad} X$ die identische Injektion
 $y \mapsto y$

(Voraussetzung ist natürlich $Y \subset X$) und τ eine Topologie auf X , so erhält man die Initialtopologie auf Y auf sehr einfache Weise:

$$\begin{aligned} A \in \tau &\Rightarrow f^{-1}(A) = \{y: f(y) \in A\} \\ &= \{y: y \in A\} \\ &= A \cap Y \end{aligned}$$



(X, τ) topologischer Raum, $Y \subset X$

(6.3) Die Spurtopologie auf Y ist die Menge

$$\tau = \{A \cap Y: A \in \tau\},$$

also die Initialtopologie bezüglich der identischen Injektion.

- B23** Die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ kann als Spurtopologie der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) aufgefasst werden, indem man $\mathbb{R}$ als Gerade und damit als Teilmenge der "Ebene" $\mathbb{R}^2$ (bzw. des "Raumes" $\mathbb{R}^3$) darstellt:



Der Begriff des topologischen Teilraumes muss nicht notwendigerweise fallen; er ist jedoch so einfach, dass er nicht vermieden werden muss.

$(X, \tau), (Y, \tau')$ top. Räume

(6.4) (X, τ) heisst topologischer Unterraum (Teilraum) von (Y, τ') $\Leftrightarrow$

$X \subset Y$ und τ ist die Spurtopologie von τ' .

- A50** Eine (abgeschlossene oder offene) Kreisfläche kann durch eine entsprechende Topologie zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^2$ gemacht werden. Zeichnen Sie eine solche Kreisfläche und einige Bilder offener Mengen.
- A51** Auf $X = \{a, b, c, d\}$ ist $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$ eine Topologie.
 a) Suchen Sie dazu die Spurtopologie auf $Y = \{a, c\}$.
 b) Welche Menge Y' ist mit der Topologie $\tau' = \{\emptyset, \{b\}, Y'\}$ ein Unterraum von (X, τ) ?
- A52** Bei welcher Topologie ist $\mathbb{N}$ ein Unterraum von $(\mathbb{R}, \tau_n)$?

A53 $\tau = \{\emptyset, \{u\}, \{u, v\}, Y\}$ ist eine Topologie auf $Y = \{u, v, w\}$.

Suchen Sie dazu eine Topologie γ auf $X = \{s, t, u, v, w\}$, sodass τ die Spurtopologie zu γ ist.

Einen weiteren Hinweis auf die Definition stetiger Abbildungen kann man mit der Konstruktion der Finaltopologie geben. In diesem Fall bietet sich das Ergebnis freilich nicht als Vermutung an, es muss also vorgegeben werden.

(X, γ) topologischer Raum, $f: X \dashrightarrow Y$

(6.5) $\tau = \{A: f^{-1}(A) \in \gamma\}$

τ ist eine Topologie auf Y , die Finaltopologie bezüglich f .

Der Beweis ist fast eine Kopie der Verifikation von (6.2) und insofern sehr gut zur Wiederholung und Vertiefung geeignet. Er ist so einfach, dass er hier unterbleiben kann.

Man kann sich mit wenigen Übungsaufgaben begnügen.

A54 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

$\gamma = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$

Welche Abbildung $f: X \dashrightarrow Y$ erzeugt auf Y die Finaltopologie $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, Y\}$?

A55 X sei eine Teilmenge von Z , γ eine Topologie auf X mit k offenen Mengen. $f: X \dashrightarrow Z$ sei die identische Inklusion.

Zeigen Sie: Hat X n und Z m Elemente, so enthält die Finaltopologie auf Z genau $k \cdot 2^{m-n}$ offene Mengen.

Anleitung: Bearbeiten Sie zunächst einen einfachen Spezialfall, in dem X etwa 2 und Z etwa 4 Elemente besitzen.

Aufgaben

- 1.) Es sei $X \subset Y$ und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Y . Ist $\mathcal{T} = \{X \cup A : A \in \mathcal{T}\}$ ebenfalls eine Topologie auf Y ?
- 2.) Zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ lässt sich eine bijektive Abbildung angeben, etwa
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ -2x+1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
Bilden Sie Initial- bzw. Finaltopologie der co-endlichen Topologie auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$.
- 3.) $(X, \mathcal{T})$ sei ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Die Initialtopologie bezüglich der identischen Injektion $f: Y \rightarrow X$ entspricht der Spurtopologie $\mathcal{T}$ auf Y .
 - a) Bilden Sie die Finaltopologie $\mathcal{R}$ zu $\mathcal{T}$ bezüglich f und vergleichen Sie mit $\mathcal{T}$.
 - b) Sei nun eine Topologie $\mathcal{T}_1$ auf Y gegeben. Man bildet (bezüglich f) dazu die Finaltopologie $\mathcal{V}_1$ auf X und anschliessend die Spurtopologie $\mathcal{R}_1$ (wieder auf Y). Welche Beziehung besteht zwischen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{R}_1$?
- 4.) Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ Unterraum von sich selbst?

§ 7 Stetige Abbildungen

Die Überlegungen zur Übertragung von Topologien in § 6 haben einen ersten Eindruck davon vermittelt, dass den Abbildungen in einer topologischen Theorie grosse Bedeutung zukommt. Es erscheint daher auch sinnvoll, von topologischen Eigenschaften von Abbildungen zu sprechen, mit denen man gewissermassen unter allen Abbildungen die für topologische Fragestellungen "nützlichen" auszeichnet.

Die wichtigste dieser Eigenschaften haben wir bereits gut vorbereitet:

Bei der Konstruktion sowohl der Initialtopologie als auch der Finaltopologie bezüglich einer Abbildung f erhielt f die topologische Eigenschaft, eine topologische Eigenschaft von Mengen (nämlich die, offen zu sein) zu übertragen:

Die Urbilder aller offenen Mengen waren offen.

Diese Abbildungseigenschaft gewährleistet offensichtlich die Übertragung von Topologien und definiert deshalb im topologischen Sinn "nützliche" Abbildungen (bei entsprechenden Vorkenntnissen der Schüler sollte man unbedingt auf monotone Abbildungen, die Ordnungsrelationen übertragen, sowie auf Homomorphismen der Algebra hinweisen).

Man definiert:

$(X, \tau), (Y, \tau')$ top. Räume, $f: X \dashrightarrow Y$

(7.1) f heisst s t e t i g $\iff \bigwedge_{A \in \tau'} f^{-1}(A) \in \tau$

Im herkömmlichen Analysisunterricht erscheint die globale Stetigkeit höchstens in der Form einer verkürzten Redeweise:

Man sagt "f ist stetig" .

anstelle von "f ist in jedem Punkt stetig".

Will man jedoch über ein rein intuitives Verständnis für den Begriff der Stetigkeit hinausgehen, so ist die globale Stetigkeit der punktweisen in didaktischer Hinsicht hoch überlegen, und zwar

- a) wegen der sehr einfachen (und leicht zu merkenden) und exakt zu begründenden Definition,
- b) wegen der stark vereinfachten Verifikation,
- c) wegen der (strukturell gesehen) zentralen Stellung in der Theorie und
- d) weil sie die Ableitung der punktweisen Stetigkeit in sehr einfacher und überzeugender Weise ermöglicht.

Darüber hinaus kommt sie dem dieser Arbeit zugrundgelegten didaktischen Ziel des Mathematisierens entgegen.

Es wird auch noch zu zeigen sein, dass man für die schulrelevanten Anwendungen die punktweise Stetigkeit überhaupt nicht benötigt.

Ein mögliches Missverständnis gilt es gleich auszuräumen:

Sind (X, τ) und (Y, τ') topologische Räume, so ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ nicht nur dann stetig, wenn τ die Initialtopologie zu τ' bzw. wenn τ' die Finaltopologie zu τ bezüglich f ist.

Ist nämlich τ Teilmenge der Finaltopologie τ' , so ist natürlich ebenso jedes Urbild einer offenen Menge offen.

Umgekehrt: Enthält $\mathcal{T}$ die Initialtopologie $\mathcal{T}'$, so müssen alle Urbilder offener Mengen zu $\mathcal{T}$ gehören.
Insgesamt:

(7.2) Die Abbildung $f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ ist stetig
 $\iff \mathcal{T}$ enthält die Initialtopologie zu $\mathcal{T}'$
 $\iff \mathcal{T}'$ ist in der Finaltopologie zu $\mathcal{T}$ enthalten.

B24 Ist Y mit der trivialen Topologie $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, Y\}$ versehen, so ist jede Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ stetig - unabhängig von der Topologie $\mathcal{T}$ auf X .

Beweis: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ und $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$
 fertig!

A56 Ist es möglich, auf X eine Topologie $\mathcal{T}$ so anzugeben, dass jede Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ unabhängig von der auf Y vorliegenden Topologie stetig ist?

Diese einfachen Vorüberlegungen lassen sicher noch keine sehr konkrete Vorstellung von den stetigen Abbildungen aufkommen. Man sollte sich auch davor hüten, Stetigkeit zu sehr anschaulich plausibel machen zu wollen, da es sonst häufig schwer fallen wird, eine korrekte Verifikation zu motivieren. Auf der anderen Seite ist es möglich, dass einige Schüler dadurch überfordert werden, dass noch nicht gefestigte Begriffe bereits zu weitergehenden Schlüssen verwendet werden. Man wird deshalb jetzt einige Beispiele stetiger Abbildungen behandeln müssen. Diese Beispiele bleiben zunächst jedoch auf Abbildungen zwischen endlichen bzw. leicht überschaubaren topologischen Räumen beschränkt oder sind selbst von

sehr einfacher Gestalt. Die den Schülern bekannten reellwertigen Abbildungen werden zunächst bewusst noch ausgeklammert, zum einen, weil sie mit der Definition 7.1 nicht unmittelbar diskutiert werden können (es sind einige zusätzliche Überlegungen notwendig), zum anderen aus dem schon angesprochenen Grund, dass eine zu starke Plausibilisierung ("stetig sind alle Abbildungen, deren Graph sich in einem Strich zeichnen lässt") unbedingt vermieden werden soll.

B25 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$
 $Y = \{5, 6, 7, 8\}$ $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{5\}, \{5, 7\}, Y\}$

$$f: \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 5 & 5 & 7 & 7 \end{array}$$

$$g: \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline g(x) & 5 & 7 & 5 & 7 \end{array}$$

f ist stetig: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$
 $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$
 $f^{-1}(\{5\}) = \{1, 2\} \in \mathcal{T}$
 $f^{-1}(\{5, 7\}) = X \in \mathcal{T}$

g ist nicht stetig: $f^{-1}(\{5\}) = \{1, 3\} \notin \mathcal{T}$

B26 Jede konstante Abbildung $f: X \xrightarrow{\quad} Y$
 $\quad \quad \quad x \mapsto k$

ist stetig:

$\mathcal{T}$ sei eine beliebige Topologie auf X ,

$\mathcal{U}$ eine beliebige Topologie auf Y .

Es sei $A \in \mathcal{T}$

1. Fall: $k \in A \implies f^{-1}(A) = X \in \mathcal{T}$

2. Fall: $k \notin A \implies f^{-1}(A) = \emptyset \in \mathcal{T}$

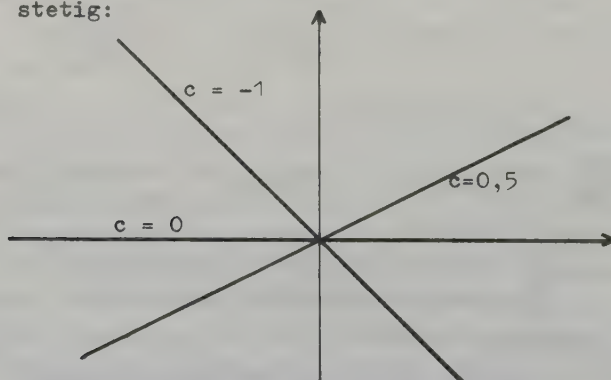
A57 Suchen Sie auf $X = \{a, b, c, d\}$ und $Y = \{1, 2, 3\}$ verschiedene Topologien so, dass die folgende Abbildung $f: X \xrightarrow{\quad} Y$ stetig ist:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & a & b & c & d \\ \hline f(x) & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

- A58 Geben Sie eine stetige und eine unstetige Abbildung zwischen $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ und $\mathbb{N}$ an. Auf X sei dabei die Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 3, 5, 7, 9\}, \{2, 4, 6, 8, 10\}, X\}$ und auf $\mathbb{N}$ die coendliche Topologie gegeben.

Weitere solche Aufgaben zu stetigen Abbildungen zwischen einfachen topologischen Räumen sind nach den vorliegenden Mustern leicht zu bilden (s. etwa Aufgabenteil). Man sollte jedoch nicht zu lange bei diesen abstrakten Spielereien verweilen. Im Folgenden soll nun die Verbindung zwischen der topologischen Definition der Stetigkeit und der durch den Analysisunterricht vermittelten hergestellt werden. Dabei wird sich insbesondere die Überlegenheit der topologischen Betrachtungsweise erweisen.

- B27 In $\mathbb{R}$ ist die Abbildung $f(x) = c \cdot x$ ($c \in \mathbb{R}$) stetig:



Die Untersuchung der Urbilder aller offenen Mengen scheint zunächst auf Schwierigkeiten zu stossen, da die offenen Mengen von sehr komplexer Gestalt sein können. Eines weiss man jedoch:

Jede offene Menge ist eine Vereinigung offener Intervalle oder leer.

$$\text{d.h. } A \in \mathcal{T}_n \iff A = \emptyset \vee A = \bigcup_i]a_i, b_i[$$

Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial: $\mathcal{F}^1(A) = \emptyset \in \mathcal{T}_n$
und muss deshalb nicht in jedem Fall untersucht werden.

$$\begin{aligned} A = \bigcup_i]a_i, b_i[&\implies \mathcal{F}^1(A) = \mathcal{F}^1\left(\bigcup_i]a_i, b_i[\right) \\ &= \bigcup_i \mathcal{F}^1(]a_i, b_i[) \quad (\text{V.13}) \end{aligned}$$

Wegen (T3) gilt nun:

Sind alle $\mathcal{F}^1(]a_i, b_i[)$ offen, so auch $\mathcal{F}^1(A)$

d.h.

f ist stetig, wenn die Urbilder aller offenen Intervalle offen sind.

Konkret: Für $c > 0$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1(]a, b[) &= \{x: cx \in]a, b[) \\ &= \{x: a < cx < b\} \\ &= \{x: \frac{a}{c} < x < \frac{b}{c}\} \\ &=]\frac{a}{c}, \frac{b}{c}[\in \mathcal{T}_n \end{aligned}$$

Für $c = 0$ ist $f(x) = 0 \cdot x = 0$ eine konstante Funktion, also nach B26 stetig.

Für $c < 0$ ist (analog zu oben)

$$\mathcal{F}^1(]a, b[) =]\frac{b}{c}, \frac{a}{c}[\in \mathcal{T}_n$$

f ist stetig!

Der Sachverhalt lässt sich sehr leicht verallgemeinern:

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum, (Y, d) metrischer Raum		
(7.3)	$f: X \dashrightarrow Y$ ist stetig	$\iff$
	$\bigwedge_{y \in Y} \bigwedge_{r > 0} \mathcal{F}^1(K(y, r)) \in \mathcal{T}$	

Zur Verifikation der Stetigkeit von Abbildungen,

die in einen metrischen Raum führen, kann man sich also auf die Untersuchung von "Testmengen", den offenen Kugeln, beschränken.

Bemerkung: Je nachdem, ob man die leere Menge als Vereinigung offener Kugeln zulässt oder nicht (s. (1.8)), muss man sie noch zu den Testmengen hinzurechnen. Da sie aber in keinem Fall Schwierigkeiten verursacht ($\mathbb{R}^1(\emptyset) = \emptyset$ ist immer offen), kann sie auch unberücksichtigt bleiben. Es ist demnach eine offene Frage, ob man $\emptyset$ als Element einer Basis fordern soll oder nicht.

Es ist nicht absolut notwendig, den oben beschriebenen Sachverhalt durch die Einführung der Basen von Topologien noch weiter zu verallgemeinern. Man sollte dies jedoch auf jeden Fall tun, wenn von Seiten der Schüler eine entsprechende Frage gestellt wird, zumal es hier ohne Schwierigkeiten möglich ist:

Ein "System" von Testmengen in einem beliebigen Raum liegt sicher dann vor, wenn man jede nicht leere offene Menge als Vereinigung von Testmengen darstellen kann. Damit hat man schon die Definition der Basis einer Topologie:

(X, τ) top. Raum, $\mathcal{B} \subset \tau$

(7.4) $\mathcal{B}$ heisst Basis der Topologie τ , wenn jede Menge aus τ sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

Für die Formulierung der Definition ist es gleichgültig, ob bekannt ist, dass auch $\emptyset$ als (leere) Vereinigung nichtleerer Mengen gedeutet werden kann (s. Bemerkung oben).

Beispiele für Basen hat man mit den offenen Kugeln in metrischen Räumen bereits zur Genüge vorliegen. Im Weiteren werden nur noch solche Basen benötigt, mit der Einführung des Begriffes in (7.4) ist man freilich gezwungen, wenigstens ein weiteres Beispiel zu geben.

B28 In $X = \{a, b, c, d\}$ mit

$$\mathcal{V} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

ist $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b\}\}$

eine Basis der Topologie $\mathcal{V}$.

Zur Untersuchung der Stetigkeit einer Abbildung $f: W \dashrightarrow X$ muss man also nur die Urbilder von 5 (statt 9) offenen Mengen betrachten.

Mit (7.4) kann man nun sagen:

$$(X, \mathcal{V}), (Y, \mathcal{T}) \text{ top. Räume, } f: X \dashrightarrow Y$$

$$\mathcal{B} \text{ Basis von } \mathcal{T}$$

$$(7.5) \quad f \text{ ist stetig} \iff \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B) \in \mathcal{V}$$

Der Beweis von (7.3) und (7.5) verläuft jeweils völlig analog zu den Überlegungen in B27.

Es ist nicht nötig, (7.5) nun auch noch entsprechend für Erzeugendensysteme zu formulieren. Dies ist zwar ohne weiteres möglich, bringt jedoch keine nennenswerten Erleichterungen. Nur so aber könnte die Einführung eines neuen Begriffes gerechtfertigt werden, der zudem erheblich schwieriger zu veranschaulichen und zu verstehen ist als der der Basis.

Die Bedeutung der in (7.3) und (7.5) geschaffenen Erleichterungen muss durch Beispiele verdeutlicht werden. Dabei wird klar ersichtlich, dass mit den neuen Hilfsmitteln eine grosse Zahl interessanter Abbildungen sehr einfach behandelt werden kann:

B29 Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig:

$$x \mapsto x^2$$

Als Voraussetzung benötigt man nur die den Schülern völlig geläufige Monotonie der Quadrat- und der Wurzelfunktion:

Für positive Zahlen a, b, x gilt

$$a < x^2 < b$$

$$\iff \sqrt{a} < x < \sqrt{b}$$

Entsprechend für $a, b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^-$

$$a < x^2 < b$$

$$\iff -\sqrt{b} < x < -\sqrt{a}$$

Nach der Graphik hat man drei verschiedene Typen von Testmengen (offenen Intervallen) zu unterscheiden:

1. Fall: $0 \leq a \implies \bar{f}^{-1}(]a, b[) = \{x: a < x^2 < b\} =]-\sqrt{b}, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$
2. Fall: $a < 0 < b \implies \bar{f}^{-1}(]a, b[) =]-\sqrt{b}, \sqrt{b}[$
3. Fall: $b \leq 0 \implies \bar{f}^{-1}(]a, b[) = \emptyset$

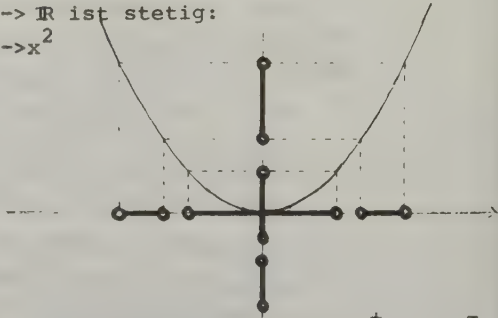
In allen Fällen erhält man als Urbilder offene Mengen.

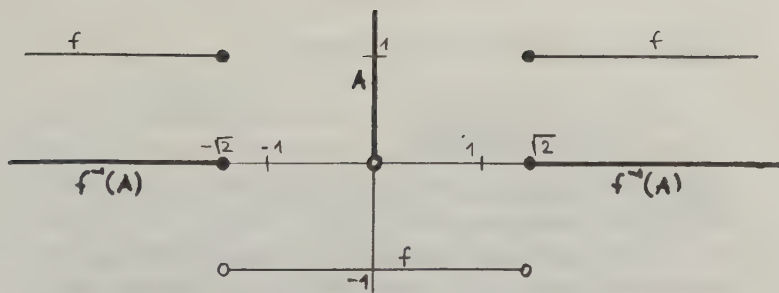
In diesem Beispiel kann man ebenso wie bei einigen weiteren in zulässiger Weise recht anschaulich argumentieren. Ein Gegenbeispiel ist

B30 In $\mathbb{R}$ ist die Abbildung $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x^2 < 2 \\ 1 & \text{für } x^2 \geq 2 \end{cases}$

nicht stetig.

Dies ändert sich, wenn man als Definitionsbereich die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen wählt, d.h. indem man die "Störstellen" entfernt.





a) Man hat nur zu zeigen, dass das Urbild eines offenen Intervalles nicht wieder offen ist:

Sei $A =]0, 2[$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^1(A) &= \{x: 0 < f(x) < 2\} = \{x: f(x) = 1\} \\ &= \{x: x^2 \geq 2\} = \{x: x \leq -\sqrt{2}\} \cup \{x: x \geq \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

b) Ist $\mathbb{Q}$ Definitionsbereich, so teilt man die Menge aller offenen Intervalle in 4 Klassen ein, deren Elemente bezüglich der gegebenen Abbildung alle gleichwertig sind:

Für $1 \notin A \wedge -1 \notin A$ ist $\mathbb{F}^1(A) = \emptyset \in \mathcal{Z}_n$

Für $1 \in A \wedge -1 \in A$ ist $\mathbb{F}^1(A) = \mathbb{Q} \in \mathcal{Z}_n$

Für $1 \notin A \wedge -1 \in A$ ist $\mathbb{F}^1(A) = \{x: x^2 < 2\}$
 $=]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} \in \mathcal{Z}_n$

Für $1 \in A \wedge -1 \notin A$ ist $\mathbb{F}^1(A) = \{x: x^2 \geq 2\}$
 $= \{x: x^2 > 2\}$

denn $x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar:

$\mathbb{F}^1(A) \in \mathcal{Z}_n$.

Man kann ganz entsprechend auch zeigen, dass es genügt, lediglich die Störstellen $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ aus dem Definitionsbereich zu entfernen, um eine stetige Abbildung zu erhalten. Dies ist eine Motivation für die punktweise Untersuchung von Abbildungen auf Stetigkeit (bzw. Unstetigkeit). Sie wird später angesprochen (s. (7.14)).

A59 In $\mathbb{R}$ sind die Abbildungen

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $g(x) = |x|$

stetig. Nachweis!

A60 a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

b) Lässt sich der Definitionsbereich von f so vergrössern, dass die entstehende Abbildung f' ebenfalls stetig ist?

c) Geben Sie einen (grösstmöglichen) Definitionsbereich für die Abbildung $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ an.

$$x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

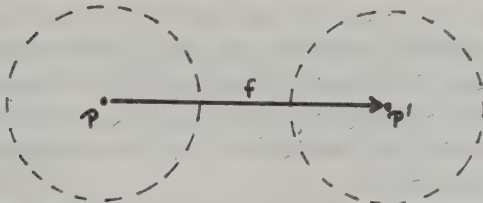
Ist g stetig?

Bemerkungen: 1) Bei diesen Aufgaben genügt eine Diskussion von Skizzen der Graphen vollständig. Es ist jeweils sofort einsichtig, dass die Urbilder offener Intervalle wieder offene Mengen sind. Eine exakte Verifikation ist daher kaum motivierbar und kann deshalb unterbleiben - obwohl sie über die Betrachtung von Ungleichungen hinaus kaum Schwierigkeiten macht. Man kann sich mit einem exemplarischen Beispiel begnügen.

2) Der hier verwendete Abbildungsbegriff lässt die Vorstellung der Unstetigkeit einer Funktion in ihren Definitionslücken, die vereinzelt anzutreffen ist ("eine gebrochen rationale Funktion ist überall - ausser in ihren Definitionslücken - stetig"), nicht zu: eine Abbildung kann in Punkten, die nicht zum Definitionsbereich gehören, gar keine Eigenschaften haben.

Bei der Behandlung stetiger Funktionen würde man ohne die Einführung einer geeigneten Basis auf $\mathbb{R}^2$ nicht ohne grosse Mühe über den jetzt erreichten Stand hinauskommen. Andererseits wäre ein Verharren bei Übungsaufgaben wie den oben angeführten (die sich leicht vermehren liessen) zweifellos ein Rückschritt bei der Beschäftigung mit topologischen Fragestellungen, da es sehr rasch zur Langeweile und zur Einschläferung der inzwischen hoffentlich in Gang gekommenen mathematischen Aktivitäten führen würde. Einen sehr schönen (da einfachen und anschaulichen) Einstieg in die stetigen Abbildungen bieten die bekannten elementargeometrischen Abbildungen:

B31 Eine Translation in der Ebene ist stetig:



Eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_n$ ist die Menge der offenen Kreisscheiben. Das Urbild einer offenen Kreisscheibe ist ersichtlich wieder eine offene Kreisscheibe (sogar eine kongruente)

Weitere entsprechende Abbildungen werden in § 8 behandelt. Sämtliche affinen Abbildungen in der Ebene sind nämlich nicht nur stetig, sondern sogar topologisch. Für den Fall, dass nicht die Absicht besteht, Kap. III in den Kurs einzubeziehen, sollten an dieser Stelle einige weitere Beispiele besprochen werden. Sie nehmen kaum Zeit in Anspruch, da die Begründung jeweils wie in B31 sehr einfach ist.

Schon bei den perspektiven Affinitäten erweist sich die Basis der offenen Kreisscheiben nicht mehr als geeignet:

B32 Die Scherung $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \mapsto (x+y,y)$

führt eine offene Kreisscheibe in eine offene Ellipsenfläche über. Das Wissen darum wird aber in der Regel nicht über eine anschauliche Vermutung hinauskommen; der konkrete Nachweis führt auf eine schwierige quadratische Gleichung, deren Lösung sicher die Mehrzahl der Schüler überfordern würde.

Man braucht daher eine geeignete Basis der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}^2$.

Wieder erweist sich der Vorspann zu diesem Kurs, in dem die metrischen Räume behandelt wurden, als nützlich:

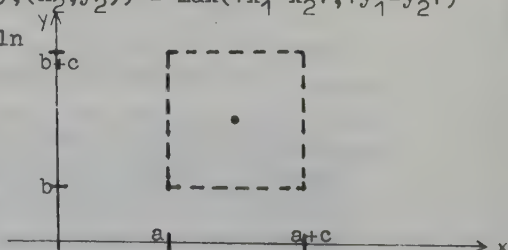
Ausser der natürlichen Metrik gibt es bekanntlich noch andere Metriken auf $\mathbb{R}^2$, die ebenfalls die natürliche Topologie erzeugen. Die offenen Kugeln bezüglich dieser Metriken sind daher (s. (7.3) u. (1.8)) ebenfalls als Testmengen zur Untersuchung der Stetigkeit brauchbar.

Da gibt es

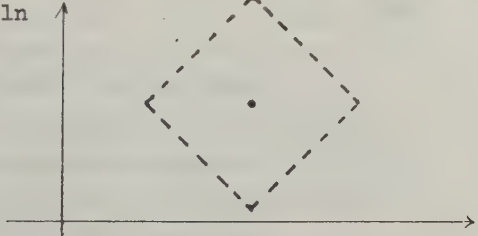
die Metrik $d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$

mit den offenen Kugeln der Form

$$]a, a+c[\times]b, b+c[$$



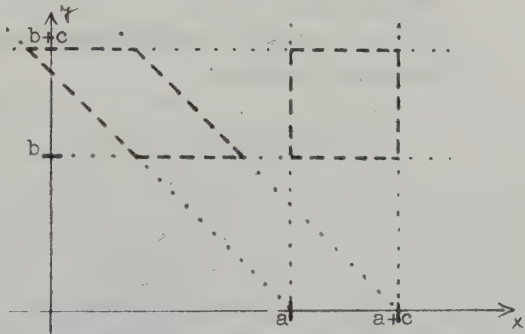
und die Metrik $d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
mit den offenen Kugeln
der Form



Schon daraus, dass die offenen Kugeln bezüglich d'
sehr einfach exakt zu beschreiben sind, kann man da=
rauf schliessen, dass ein Versuch mit ihnen Erfolg
verspricht:

$$\begin{aligned} f((x, y)) \in]a, a+c[\times]b, b+c[&\iff \\ x+y \in]a, a+c[\wedge y \in]b, b+c[&\iff \\ a < x+y < a+c \wedge b < y < b+c &\iff \\ -x+a < y < -x+a+c \wedge b < y < b+c \end{aligned}$$

Anschaulich:
Das Urbild
eines offe=
nen Quadrats
ist ein of=
fenes Paral=
lelogramm.



Bemerkung: Ein Übergang von der Basis der offenen
Quadrate $]a, a+c[\times]b, b+c[$ zu der der offenen Recht=
ecke $]a, b[\times]c, d[$ bringt nur geringe Vorteile in
der Darstellung, ist jedoch zumindest dann, wenn man
eine Einführung der Basis vermieden hat, vom Aufwand
her nicht gerechtfertigt. In dieser Arbeit wird des=
halb konsequent die Schreibweise der offenen Quadrate
beibehalten.

A61 Prüfen Sie, ob die angegebenen Abbildungen stetig sind:

$$a) f_1: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y,x) \quad (\text{Spiegelung})$$

$$b) f_2: \mathbb{R} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, 2x) \quad (?)$$

$$c) f_3: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \quad (?)$$

$$d) p_x: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathbb{R} \quad (\text{Projektion auf die } x\text{-Achse}) \\ (x,y) \mapsto x$$

A62 Ist die "Treppenfunktion" $f: \mathbb{R} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathbb{Z}$
 $x \mapsto :x:$

stetig?

Erläuterung: Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq x < z + 1$.

Man definiert dann $:x: = z$.

$\mathbb{Z}$ sei mit der Spurtopologie zur natürlichen Topologie versehen.

Eine grosse Klasse weiterer stetiger Abbildungen bilden die rationalen Funktionen. Man kann dies in einigen einfachen Schritten, die alle für sich alleine von Interesse sind, darauf zurückführen, dass die algebraischen Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ stetig sind.

In den meisten Fällen wird man nicht voraussetzen können, dass die wohlvertrauten Rechenoperationen als Abbildungen erkannt werden:

$$\begin{array}{lcl} \text{z.B.} & +: \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto x+y \end{array}$$

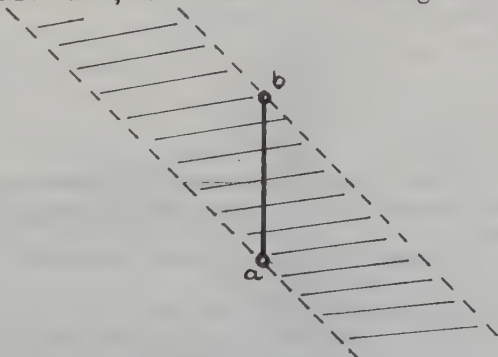
Zu untersuchen sind also die Urbilder offener Intervalle:

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(]a,b[) &= \{(x,y): a < x+y < b\} \\ &= \{(x,y): -x + a < y < -x + b\} \end{aligned}$$

Das ist in $\mathbb{R}^2$ ein offener Streifen, der von den Geraden

$$y = -x + a \quad \text{und} \quad y = -x + b$$

begrenzt wird, also eine offene Menge:

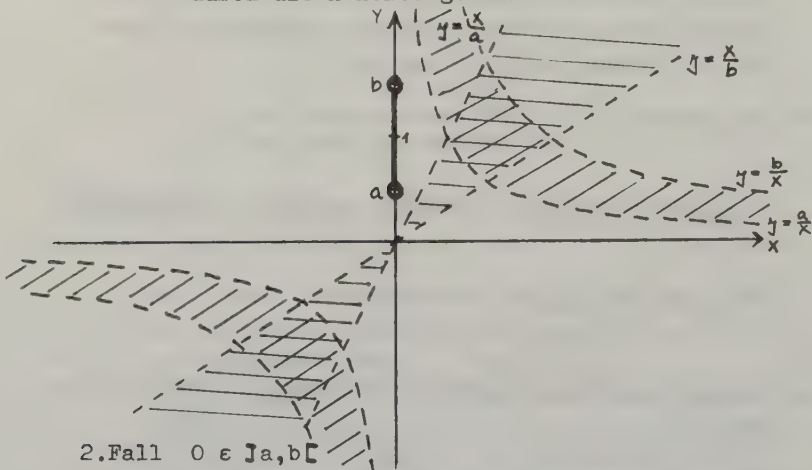


Ebenso einfach ergeben sich die Urbilder offener Intervalle bei der Subtraktion (auch sie sind offene Streifen).

Bei Multiplikation und Division sind prinzipiell zwei Fälle bei den offenen Intervallen zu unterscheiden:

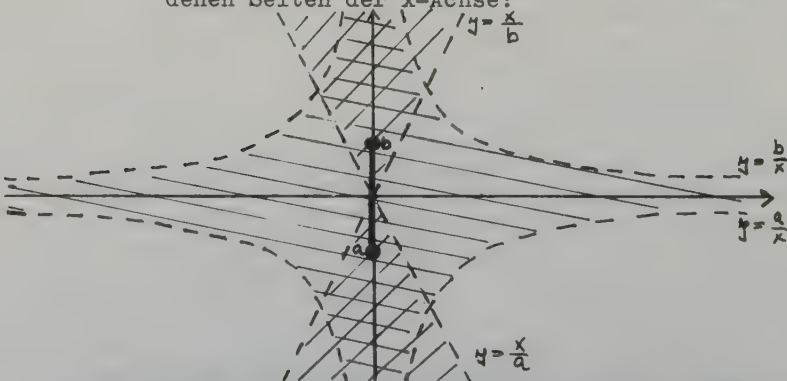
1. Fall $0 \notin]a, b[$

Dann sind die begrenzenden Kurven nicht durch die x-Achse getrennt:



2. Fall $0 \in]a, b[$

Die begrenzenden Kurven liegen auf verschiedenen Seiten der x-Achse:



Die Auflösung der einzelnen Ungleichungen zeigt, welche Gebiete das Urbild des offenen Intervalls umfasst.

(7.6) Die Abbildungen

+:	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	----->	$\mathbb{R}$
-:	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	----->	$\mathbb{R}$
·:	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	----->	$\mathbb{R}$
÷:	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$	----->	$\mathbb{R}$

sind stetig.

Daraus kann man nun ableiten, dass auch Summe, Produkt, Differenz und Quotient zweier stetiger reellwertiger Abbildungen stetig ist.

Als Einführungsbeispiel bietet sich etwa die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 = x^2(2x-3)$$

an, die zwar direkt nur schwer als stetig klassifiziert werden kann, die sich aber aus zwei bereits als stetig erkannten Funktionen zusammensetzt.

Man braucht daher den Schluss, dass mit zwei reellwertigen Funktionen auch ihr Produkt stetig ist.

Die folgende Zerlegung des Produkts zweier Funktionen

$$f_1 \cdot f_2: \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$$

in

$$h: \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (f_1(x), f_2(x)) \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

wird man wohl vorgeben müssen. Sie zeigt, was noch nachgewiesen werden muss:

1) Sind die Funktionen f_1 und f_2 stetig, so auch h .

Da man schon weiss, dass die Multiplikation stetig ist, braucht man noch:

2) Die Hintereinanderausführung zweier stetiger Abbildungen ist wieder stetig.

Das sieht man sehr leicht ein:

$$\begin{array}{ccccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}) & \xrightarrow{g} & (Z, \mathcal{R}) \\ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{G}^{-1}(A)) \in \mathcal{T} & \leftarrow & \mathcal{G}^{-1}(A) \in \mathcal{T} & \leftarrow & A \in \mathcal{R} \end{array}$$

Zeigt man nun noch $(g \circ f)^{-1}(A) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{G}^{-1}(A))$

- das ist eine einfache Übung - so gilt

$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}), (Z, \mathcal{R})$ top. Räume $f: X \longrightarrow Y, \quad g: Y \longrightarrow Z$
(7.7) f, g stetig $\implies g \circ f$ stetig

Da im Augenblick die Begründung der Stetigkeit rationaler Funktionen im Vordergrund steht, sollte man auf Beispiele verzichten und sofort das

"Gabeltheorem" angehen:

f_1, f_2 sind Abbildungen in $\mathbb{R}^1$
(7.8) f_1, f_2 sind stetig $\iff$ $\begin{array}{ccc} h: \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{array} \quad \text{ist stetig}$

Beweis: " $\implies$ " f_1, f_2 stetig.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}([a, a+c[\times]b, b+c[) &= \{x: h(x) \in [a, a+c[\times]b, b+c[\} \\ &= \{x: f_1(x) \in [a, a+c[\wedge f_2(x) \in]b, b+c[\} \\ &= \mathcal{F}_1^{-1}([a, a+c[) \cap \mathcal{F}_2^{-1}(]b, b+c[) \in \mathcal{T}_n \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \in \mathcal{T}_n \qquad \qquad \in \mathcal{T}_n \end{aligned}$$

¹⁾ (7.8) könnte zwar ohne weiteres verallgemeinert werden - der Beweis lässt sich sofort auf eine Abbildung $h: X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (mit mehr Mühe auf $h: X \longrightarrow Y \times Z$) übertragen - das würde aber an dieser Stelle möglicherweise nur verwirren und wird nicht benötigt.

Die Richtung " $\Leftarrow$ " des Gabeltheorems wird im Folgenden nicht benötigt; sie wird hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt:

h sei stetig.

Verkettet man h mit je einer der Projektionen p_x bzw. p_y (s. A61 d), die beide stetig sind, so ergibt sich mit (7.7), dass auch

$f_1 = p_x \circ h$ und $f_2 = p_y \circ h$ stetig sind.

(7.6), (7.7) und (7.8) zusammen ergeben nun als einfache Folgerung den wichtigen Satz

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	
(7.9)	$f, g \text{ stetig} \implies$
S	$f + g \text{ stetig}$ $f - g \text{ stetig}$ $f \cdot g \text{ stetig}$ $\frac{f}{g} \text{ stetig}$

Dabei ist (z.B.) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Achtung: $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus g^{-1}(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{!!!!!!}$
 $x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

A64 Bestimmen Sie in (7.9) den Definitionsbereich der Abbildungen $f+g, f-g, f \cdot g$.

A65 Beweisen Sie Satz (7.9).

Sehr leicht erhält man jetzt

(7.10)
S Alle rationalen Funktionen sind stetig.

Wieder - wie in 7.9 - ist anzumerken, dass bei gebrochen rationalen Funktionen der Definitionsbereich D i.a. von $\mathbb{R}$ verschieden ist.

Beweis: Jede ganzrationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

lässt sich dadurch erzeugen, dass man die stetigen Funktionen (s. B26, B27)

$$f_1(x) = x \quad \text{und} \quad f_2(x) = \text{const.}$$

endlich oft addiert, subtrahiert und multipliziert.

Man beweist das mit vollständiger Induktion. Dies sollte zwar erwähnt, aber nicht durchgeführt werden, da eine Einsicht in die Notwendigkeit des Verfahrens aufgrund des völlig offensichtlichen Sachverhaltes nicht erwartet werden kann. Instruktiver sind einige einfache Beispiele.

Eine gebrochen rationale Funktion h kann wie in (7.9) als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen f und g angegeben werden: $h: \mathbb{R} \setminus \bar{g}^{-1}(\{0\}) \dashrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

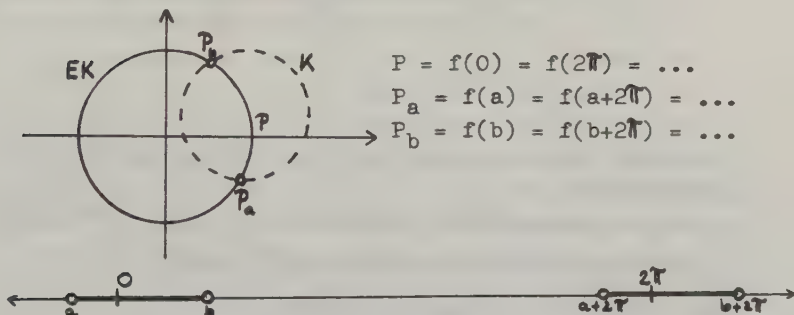
(7.9) sagt dann sofort, dass h stetig ist.

Eine gewisse anschauliche Charakterisierung stetiger Funktionen kann man an dieser Stelle erzielen, indem man den Graphen einer gebrochen rationalen Funktion mit Polstelle und den einer stückweise stetigen (aber in ganz $\mathbb{R}$ definierten) Funktion mit "Sprungstelle" miteinander vergleicht.

Als letztes Beispiel soll gezeigt werden, dass auch die trigonometrischen Funktionen dem vorliegenden Stetigkeitsbegriff zugänglich sind. Einschränkend ist dazu allerdings zu bemerken, dass die trigonometrischen Funktionen in der Schule üblicherweise nicht exakt,

sondern anschaulich definiert werden. Entsprechend wird man daher auch anschaulich argumentieren müssen.

B32a Vorausgesetzt wird die Existenz¹⁾ einer Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die anschaulich als "längentreue Aufwicklung" (wie ein Seil auf eine Dose) der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ auf den Einheitskreis EK gedeutet werden kann:



$x \in \mathbb{R}$ wird offensichtlich genau dann in die offene Kreisscheibe K (d.h. in den "offenen" Kreisbogen zwischen P_a und P_b) abgebildet, wenn x in einem der offenen Intervalle $]a+2k\pi, b+2k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$) liegt.²⁾

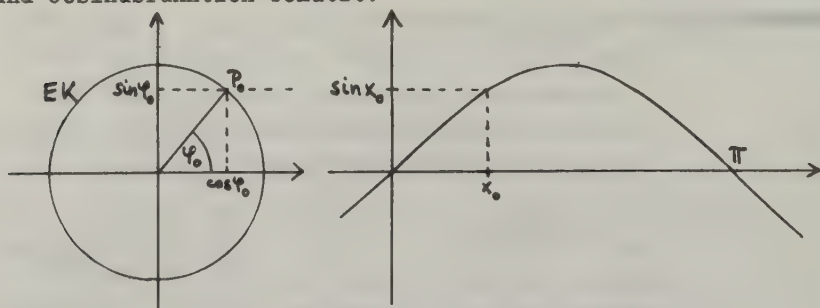
Das Urbild der offenen Kreisscheibe K ist daher in $\mathbb{R}$ eine Vereinigungsmenge offener Intervalle und deshalb offen.

In gleicher Weise untersucht man noch die übrigen möglichen Lagebeziehungen: $j =$ desmal ergibt sich sofort als Urbild von K eine offene Menge ($\mathbb{R}$ oder $\emptyset$ oder $\mathbb{R} \setminus \{c+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$). Das anschauliche Modell von f belegt daher die Stetigkeit der Abbildung.

¹⁾ Dies ist für die Schüler - aufgrund ihrer Vorerfahrungen aus dem Geometrieunterricht - überhaupt keine Frage. Es dürfte sehr schwer fallen, die Beweisbedürftigkeit der Existenz der Abbildung klarzumachen.

²⁾ Hier geht die anschauliche Vorstellung der "Aufwickelbarkeit" entscheidend ein.

Die Existenz der Abbildung f wird in der Schule üblicherweise zur Definition der reellwertigen Sinus- und Cosinusfunktion benutzt:



Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $P_0 = f(x_0)$ auf dem Einheitskreis.

Zu P_0 wiederum gehört der Winkel φ_0 ($0^\circ \leq \varphi_0 < 360^\circ$).

P_0 hat dann die Koordinaten $(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$.

Man definiert:

$$\cos x_0 := \cos \varphi_0$$

$$\sin x_0 := \sin \varphi_0$$

Bezeichnet man noch die Projektionen von $\mathbb{R}^2$ auf die Achsen mit

$p_x: (x,y) \mapsto x$ bzw. $p_y: (x,y) \mapsto y$,

so ist $\sin x_0 = p_y(P_0) = p_y(f(x_0))$, also $\sin = p_y \circ f$
 und $\cos x_0 = p_x(P_0) = p_x(f(x_0))$, also $\cos = p_x \circ f$.

Mit p_x und p_y (s. A61d) sind daher wegen (7.7) auch $\cos$ und $\sin$ stetig.

(7.9) zeigt dann sofort, dass auch $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ stetige Funktionen (mit eingeschränktem Definitionsbereich!) sind.

Die Stetigkeit von Abbildungen ist ein fundamental wichtiger topologischer Begriff. Etwas von dieser Bedeutung läßt sich vermitteln, wenn man zeigt, daß auch die weiteren bisher bekannten topologischen Eigenschaften von Mengen (nämlich daß sie abgeschlossen Mengen bzw. Umgebungen innerer Punkte sind) durch stetige Abbildungen rückübertragen werden.

Noch wichtiger aber erscheint die Tatsache, daß man durch diese Überlegungen einen einfachen Übergang zur Definition der punktweisen Stetigkeit schaffen und damit den Zusammenhang zu bekannten Begriffen der Analysis herstellen kann (s.S. 142). Das empfiehlt sich auch dann, wenn man darauf abheben will, daß die punktweise Stetigkeit im Gymnasium prinzipiell gar nicht benötigt wird.

$f: X \longrightarrow Y$ stetig, $A \subset Y$	
(7.11) S	A abgeschlossen $\implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen

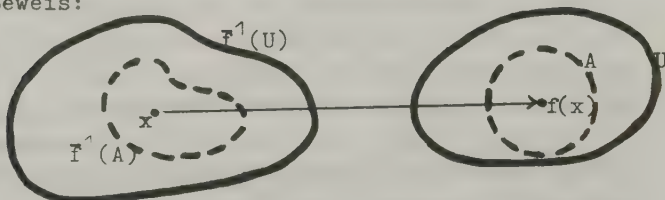
Beweis: A abgeschlossen $\implies Y \setminus A$ offen
 f stetig $\implies f^{-1}(Y \setminus A)$ offen
 $\implies f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A)$
 $\quad \quad \quad = X \setminus f^{-1}(A)$ offen
 $\implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

A66 Zeigen Sie, dass man die Stetigkeit von Abbildungen auch so definieren kann:
 Eine Abbildung f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.

Analog zeigt man

$(X, \tau), (Y, \sigma)$ top. Räume, $f: X \dashrightarrow Y$ f stetig, $U \subset Y, x \in X$.	
(7.12) S	$U \in \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$

Beweis:



$$\begin{aligned}
 U \in \mathcal{U}(f(x)) &\implies \bigvee_{A \in \tau} f(x) \in A \subset U \\
 &\implies x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U) \quad (V.13) \\
 f \text{ stetig} &\implies f^{-1}(A) \in \tau \\
 &\implies \bigvee_{B \in \tau} x \in B \subset f^{-1}(U) \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)
 \end{aligned}$$

Wie oben lässt sich nun auch mit (7.12) die Stetigkeit von Abbildungen definieren. In diesem Fall jedoch hat dieser Sachverhalt wichtige Konsequenzen und soll deshalb in einem Satz festgehalten werden:

$(X, \tau), (Y, \sigma)$ top. Räume, $f: X \dashrightarrow Y$	
(7.13) S	$f \text{ ist stetig} \iff$ $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{U \in \mathcal{U}(f(x))} f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$

Beweis: " $\Rightarrow$ " schon gezeigt (s. (7.12)).

" $\Leftarrow$ " Zu zeigen: $A \in \tau \Rightarrow \tilde{f}^1(A) \in \mathcal{Z}$

$$\text{oder: } A \in \tau \Rightarrow \bigwedge_{x \in \tilde{f}^1(A)} \tilde{f}^1(A) \in \mathcal{U}(x) \quad (3.4)$$

$$x \in \tilde{f}^1(A) \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow A \in \mathcal{U}(f(x))$$

$$\Rightarrow \tilde{f}^1(A) \in \mathcal{U}(x) \\ \text{nach Voraussetzung.}$$

Definiert man nun

$$(X, \mathcal{Z}), (Y, \tau) \text{ top. R.}, f: X \dashrightarrow Y, x_0 \in X$$

(7.14) f heisst stetig im Punkt $x_0 \Leftrightarrow$

$$\text{D} \quad \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(f(x_0))} \tilde{f}^1(U) \in \mathcal{U}(x_0)$$

so lässt sich (7.13) so umformulieren:

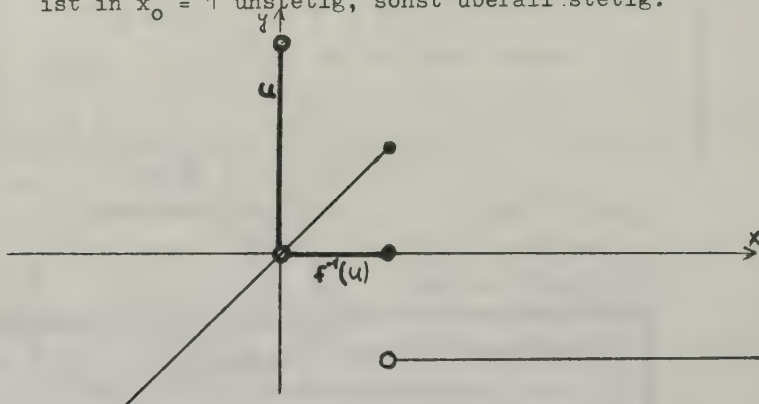
(7.15) Eine Abbildung ist genau dann stetig,
 $\S$ wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Diese Aussage klingt sicher trivial, ist es aber ihrem Inhalt nach nicht - man vergleiche nur die Definitionen (7.1) und (7.14).

B33 Die Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ -1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

ist in $x_0 = 1$ unstetig, sonst überall stetig.



Beweis: $U =]0, 2[\implies U \in \mathcal{U}(f(1))$

aber $f^{-1}(U) = \{x: 0 < x \leq 1\} \notin \mathcal{U}(1)$

$\implies f$ ist in $x_0 = 1$ nicht stetig.

Schränkt man nun f auf $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ ein und setzt

$A = \{x: x < 1\}$ und $B = \{x: x > 1\}$,

so ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(]a, b[) &=]a, b[\cap A \quad \text{für } -1 \notin]a, b[\\ &= (]a, b[\cap A) \cup B \quad \text{für } -1 \in]a, b[. \end{aligned}$$

f ist also in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ stetig.

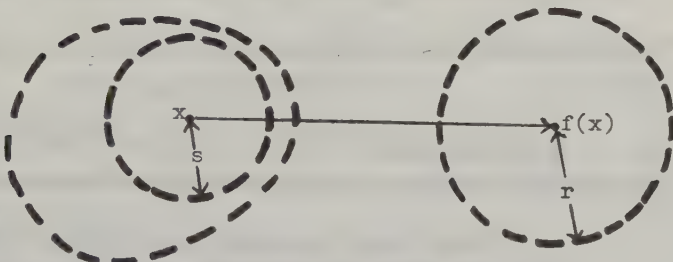
A67 $X = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$

Suchen Sie eine bijektive Abbildung $f: X \longrightarrow X$,
die in den Punkten 1 und 2 stetig, im Punkt 3
aber nicht stetig ist.

Wie schon bei der Überprüfung der (globalen) Stetigkeit kann man sich bei der punktweisen Stetigkeit auf die Untersuchung von Testmengen beschränken. Es soll an dieser Stelle jedoch darauf verzichtet werden, den Begriff Umgebungsbasis einzuführen, man wird sich vielmehr

auf metrische Räume beschränken, wo sich die Testmengen von selbst anbieten:

$(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f: X \rightarrow Y$	
(7.16)	$f \text{ ist stetig in } x_0 \in X \iff$ $\bigwedge_{r>0} \mathbb{F}^1(K(f(x_0), r)) \in \mathcal{U}(x_0)$



Beweis: " $\implies$ " $\bigwedge_{r>0} K(f(x_0), r) \in \mathcal{U}(f(x_0))$
 (7.14) liefert daraus unmittelbar das Gewünschte.

" $\impliedby$ " $U \in \mathcal{U}(f(x_0))$
 $\implies \bigvee_{r>0} f(x_0) \in K(f(x_0), r) \subset U \quad (3.4) \text{ u. } (1.6)$
 $\implies x_0 \in \mathbb{F}^1(K(f(x_0), r)) \subset \mathbb{F}^1(U)$
 $\implies \mathbb{F}^1(U) \in \mathcal{U}(x_0) \quad (3.5.c)$

Mit (7.16) hat man eine nützliche Beschreibung der punktwweisen Stetigkeit erhalten. Wenige einfache Umformungen ergeben die übliche (umständlichere) Definition aus der Analysis:

$$\begin{aligned}
 & \bigwedge_{r>0} \quad \mathbb{F}^1(K(f(x_0), r)) \in \mathcal{U}(x_0) \\
 \Leftrightarrow & \bigwedge_{r>0} \bigvee_{s>0} \quad x_0 \in K(x_0, s) \subset \mathbb{F}^1(K(f(x_0), r)) \\
 \Leftrightarrow & \bigwedge_{r>0} \bigvee_{s>0} \bigwedge_{x \in X} \quad x \in K(x_0, s) \Rightarrow x \in \mathbb{F}^1(K(f(x_0), r)) \\
 \Leftrightarrow & \bigwedge_{r>0} \bigvee_{s>0} \bigwedge_{x \in X} \quad x \in K(x_0, s) \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), r) \\
 \Leftrightarrow & \bigwedge_{r>0} \bigvee_{s>0} \bigwedge_{x \in X} \quad d(x, x_0) < s \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < r
 \end{aligned}$$

Wir spezialisieren gleich auf Funktionen in $\mathbb{R}$:

(7.17)	$f \text{ ist stetig in } x_0 \Leftrightarrow$ $\bigwedge_{r>0} \bigvee_{s>0} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x - x_0 < s \Rightarrow f(x) - f(x_0) < r$
--------	---

(Bemerkung: Die ungewöhnliche Schreibweise ist maschinenabhängig; sie kann leicht auf die übliche Form gebracht werden.)

Ein Beispiel soll zeigen, in welch unwegsames Gelände man sich beim Verzicht auf die topologische Betrachtungsweise begibt:

B34 Die Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$

ist bekanntlich stetig (B29 bzw. (7.10)).

Wir zeigen nun mit (7.17), dass f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$r > 0$ sei gegeben. Es ist

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(x_0)| < r & \Leftrightarrow |x^2 - x_0^2| < r \\
 & \Leftrightarrow |(x - x_0)(x + x_0)| < r \\
 & \Leftrightarrow |x - x_0| \cdot |x + x_0| < r
 \end{aligned}$$

Wie ist nun $s > 0$ zu wählen, damit dieser erfüllt werden kann?

Wegen $|x - x_0| < s$ ist jedenfalls

$$(1) \quad s \cdot |x + x_0| < r \quad \text{eine hinreichende Bedingung.}$$

Daraus kann - da $|x + x_0|$ nicht notwendig von 0 verschieden ist - s nicht direkt bestimmt werden. Das ändert man in der nächsten hinreichenden Bedingung:

$$(2) \quad s \cdot (|x + x_0| + 1) \leq r \Leftrightarrow s \leq \frac{r}{|x + x_0| + 1}$$

Da x variabel ist (in den Grenzen $x_0 - s$ und $x_0 + s$), muss man noch weiter abschätzen:

Wegen $2|x_0| - s < |x + x_0| < 2|x_0| + s$ ist

$$\frac{r}{2|x_0| + s + 1} < \frac{r}{|x + x_0| + 1} \quad \text{Nächste Bedingung:}$$

$$(3) \quad s \leq \frac{r}{2|x_0| + s + 1}$$

Die daraus entstehende quadratische Ungleichung lässt sich vermeiden, indem man für s eine Höchstgrenze einführt, etwa $s \leq 1$.

Damit bekommt man die Bedingung

$$(4) \quad s \leq \frac{r}{2(|x_0| + 1)}$$

Das gewährleistet man - ebenso wie die Höchstgrenze für s - durch die Festsetzung

$$(5) \quad s = \min\left(1, \frac{r}{2(|x_0| + 1)}\right)$$

Damit ist der Beweis der Stetigkeit von f im Punkt x_0 abgeschlossen, denn setzt man $|x - x_0| < s$, so gilt

$$|x - x_0| \cdot |x + x_0| < s \cdot |x + x_0| < r,$$

was zu zeigen war.

Das Beispiel zeigt, dass die Suche nach einer geeigneten Abschätzung i.a. nicht ganz trivial ist; jedenfalls für die bisher (und in der Schule generell) behandelten Funktionen bietet es sich an, mit der globalen Stetigkeit zu arbeiten.

Da es nicht Aufgabe eines Topologiekurses sein kann, Epilontik zu üben, mag dieses Beispiel genügen.

Aufgaben

- 1.) Ist die Aussage

"Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede Menge $A \subset Y$ gilt:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A)$$

wahr?

- 2.) Gegeben sind die topologischen Räume

$$X = \{u, v, w\} \quad \tau = \{\emptyset, \{v\}, \{v, w\}, X\}$$

$$Y = \{r, s, t, u\} \quad \sigma = \{\emptyset, \{r, s\}, \{s\}, \{s, u\}, \{r, s, u\}, Y\}$$

- a) Untersuchen Sie die Abbildung f auf Stetigkeit:

x	u	v	w
f(x)	t	u	r

- b) Ändern Sie die Abbildung so ab, dass sie stetig wird.

- c) Geben Sie eine Basis der Topologie τ an.

- 3.) Ist die "Wurzelfunktion"

$$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

stetig?

- 4.) Zeigen Sie unter Voraussetzung der Stetigkeit der Wurzelfunktion, dass die Abbildung

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{|x|^2 + 1}$$

stetig ist.

- 5.) Zeigen Sie: jede ebene perspektive Affinität ist stetig.

- 6.) Suchen Sie alle Unstetigkeitsstellen der Abbildung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

7.) Ist Satz (7.7) auch in umgekehrter Richtung gültig?

8.) Die Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ sei stetig.
Beurteilen Sie die Aussagen

a) A ist offen $\implies f(A)$ ist offen

b) A ist abgeschlossen $\implies f(A)$ ist abgeschlossen.

9.) τ und σ seien Topologien auf X . Welche Bedingungen sind an τ und σ zu stellen, damit die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f: (X, \tau) & \longrightarrow & (X, \sigma) \\ x & \longrightarrow & x \end{array}$$

stetig ist?

Kapitel III

A N S C H A U L I C H E

T O P O L O G I E

§ 8 Topologische Abbildungen

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass der Kurs an dieser Stelle durchaus sinnvoll in anderer Weise fortgesetzt werden kann, etwa mit Kapitel V (Grenzwerte). Für den hier gewählten Aufbau sprechen u.a. folgende Gründe:

- 1.) In § 6 wurden die Möglichkeiten der Übertragung von Topologien untersucht. Diese Untersuchung wurde durch die Definition der stetigen Abbildung zu einem vorläufigen Ende gebracht, wobei allerdings ein Teilergebnis von § 6 keine Berücksichtigung fand: bei einer bijektiven Abbildung ergeben die Bilder der offenen Mengen eine Topologie, was bei stetigen Abbildungen nicht der Fall sein musste. Stetige Abbildungen sorgen also sicher nicht für eine "optimale" Topologieübertragung.
- 2.) Die Bedeutung der Homöomorphismen in der Topologie alleine mag schon Grund genug sein, sie auch in einem Topologiekurs in der Schule wenigstens kurz anzusprechen. Eine Motivation für die Behandlung der topologischen Abbildungen ist jedoch nur an dieser Stelle möglich.
- 3.) Es erscheint vorteilhaft, gewissermassen als "Oase" eine Zeitlang anschauliche und von sich aus interessierende und motivierende Dinge zu behandeln. Der bislang behandelte Stoff ist für einige Schüler sicher nicht leicht zu verdauen gewesen. Eine Wiederholung - in kurzweilige Übungen verpackt - ist daher angebracht.
- 4.) Die landläufige Vorstellung von Topologie - so weit überhaupt eine vorhanden ist - lässt sich mit dem Stoff der ersten zwei Kapitel nur schwer

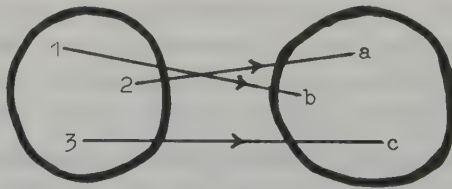
in einen Zusammenhang bringen. Mit der Definition der topologischen Abbildung hat man jedoch den gesamten theoretischen Hintergrund aller anschaulichen Probleme (s. etwa § 9), die gewöhnlich als Inhalt der Topologie angesehen werden, bereitgestellt.

- 5.) Ein Topologiekurs, der aus Zeitgründen gestrafft werden muss, kann mit Kapitel III durchaus sinnvoll zu Ende gebracht werden, wenn auch von der Sache her andere Abschnitte bedeutungsvoller erscheinen mögen.

Die Definition der topologischen Abbildung erschliesst sich recht einfach, wenn man nach Bedingungen sucht, die angeben, wann zwei topologische Räume aus mathematischer Sicht völlig gleichwertig sind.

Eine solche Bedingung ist sicher die Existenz einer Abbildung, die die beiden Räume "exakt" aufeinander abbildet, d.h.

- (a) Die Elemente der Mengen X und Y müssen einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sein:



- (b) Die Elemente der Topologien müssen einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sein:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{T} = \{ & \emptyset & , & \{1\} & , & \{2,3\} & , & \{1,2,3\} & \} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathcal{T} = \{ & \emptyset & , & \{b\} & , & \{a,c\} & , & \{a,b,c\} & \} \end{array}$$

Die erste Forderung lässt sich ohne weiteres umformulieren:

(a') Die Abbildung muss bijektiv sein.

Die naheliegende Vermutung, die zweite Forderung sei gleichwertig damit, dass die Abbildung stetig ist, erweist sich als falsch:

Dieselbe Abbildung f ist bei Vorgabe der Topologien

$$\mathcal{T} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

$$\text{und } \mathcal{T}' = \{ \emptyset, \{b\}, \{a,b,c\} \}$$

zwar stetig, überträgt jedoch die Topologien keineswegs exakt.

Zusätzlich ist zu fordern, dass auch die Bilder aller offenen Mengen offen sein müssen. (!)

Die Definition der offenen Abbildung kann man umgehen, wenn man zeigt, dass für bijektive Abbildungen die Stetigkeit der Umkehrabbildung f^{-1} mit (!) gleichwertig ist.

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\iff \bigvee_{x \in A} y = f(x) &\iff \bigvee_{x \in A} f^{-1}(y) = x \\ &\iff f^{-1}(y) \in A &\iff y \in (f^{-1})^{-1}(A) \end{aligned}$$

also $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$

Ist nun f^{-1} stetig, so sind die Bilder $f(A)$ aller offenen Mengen offen:

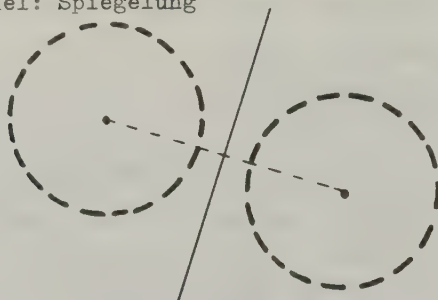
(b') f und f^{-1} müssen stetig sein.

$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ top. Räume, $f: X \rightarrow Y$

(8.1) f heisst topologische Abbildung (Homöomorphismus) $\iff$
 f ist bijektiv und f und f^{-1} sind stetig.

B35 Jede ebene Ähnlichkeitsabbildung ist topologisch.

Beispiel: Spiegelung



Jede Ähnlichkeitsabbildung ist bijektiv;
Bild und Urbild einer offenen Kreisscheibe
ist wieder eine offene Kreisscheibe, also
sind Abbildung und Umkehrabbildung stetig.

A68 Zeigen Sie: Die Verkettung von endlich vielen topologischen Abbildungen ergibt eine topologische Abbildung.

Analog zu den Überlegungen bei der Definition von Topologien (S. 52 - 58) könnte man hier auf die Idee kommen, in A68 "endlich viele" durch "beliebig viele" zu ersetzen. Für Schüler ist es nicht unbedingt selbstverständlich, dass unendlich viele Abbildungen nicht verkettet werden können. Man sollte das an einem Beispiel aufzeigen:

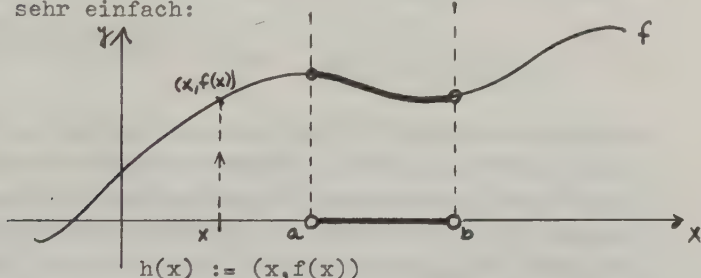
B36 Eine Translation ist (s. B35) eine topologische Abbildung. Wollte man aber diese Abbildung unendlich oft mit sich selbst verketteten, so könnte man einem Punkt der Ebene keinen Bildpunkt mehr zuordnen: es liegt keine Abbildung und damit natürlich erst recht keine topologische Abbildung vor.

A69 Welche der folgenden ganzrationalen Funktionen sind topologische Abbildungen?

- a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^{10}$

Einen anschaulichen Eindruck von der Wirkung topologischer Abbildungen vermittelt uns wieder das Gabrieltheorem (7.8):

B37 Eine Abbildung von $\mathbb{R}$ auf den Graphen einer beliebigen Abbildung $f: \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ erhält man sehr einfach:



h ist nach (7.8) genau dann stetig, wenn f und die identische Abbildung $g: x \dashrightarrow x$ stetig sind, d.h. wenn f stetig ist.

Ist nun f stetig, so kann man zeigen, dass h darüber hinaus sogar topologisch ist:

h ist offensichtlich injektiv

$$(x_1 \neq x_2 \implies (x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2)))$$

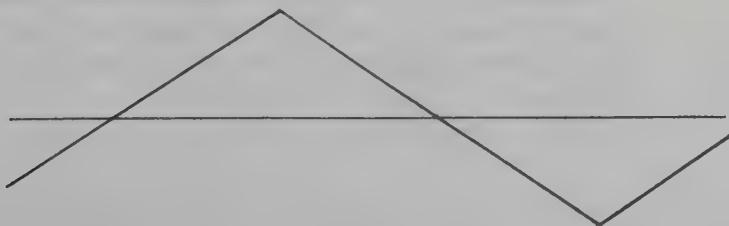
und durch Einschränkung der Zielmenge auf die Bildmenge auch surjektiv.

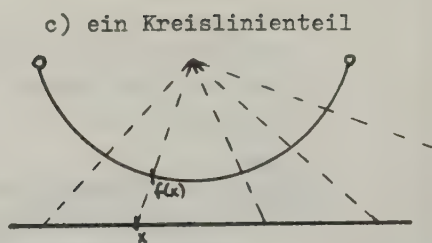
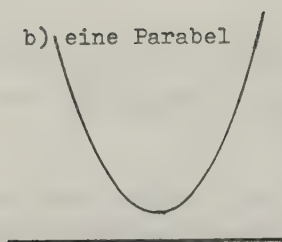
Die Stetigkeit von h^{-1} erkennt man leicht an der obigen Skizze:

$$(h^{-1})^{-1}([a, b[) = h([a, b[) = ([a, b[\times \mathbb{R}) \cap h(\mathbb{R})$$

Die "Gerade" $\mathbb{R}$ lässt sich also auf vielerlei Weise topologisch "verbiegen". Einige topologische Bilder einer Geraden sind

a) eine "Zackenlinie"





A70 Weisen Sie nach, dass in c) eine topologische Abbildung vorliegt.

Zwei topologische Räume, die sich topologisch aufeinander abbilden lassen, sind für topologische Überlegungen völlig gleichwertig, da sich alle topologischen Gegebenheiten exakt übertragen lassen (s. (7.11) und (7.12)). Man sagt:

(8.2) Zwei topologische Räume, zwischen denen es eine topologische Abbildung gibt, heißen topologisch äquivalent.

A71 Zeigen Sie: Jeder topologische Raum ist zu sich selbst topologisch äquivalent.

A72 Suchen Sie eine Topologie auf $\mathbb{Z}$ so, dass $\mathbb{Z}$ zu $(\mathbb{N}, \tau_c)$ topologisch äquivalent ist.

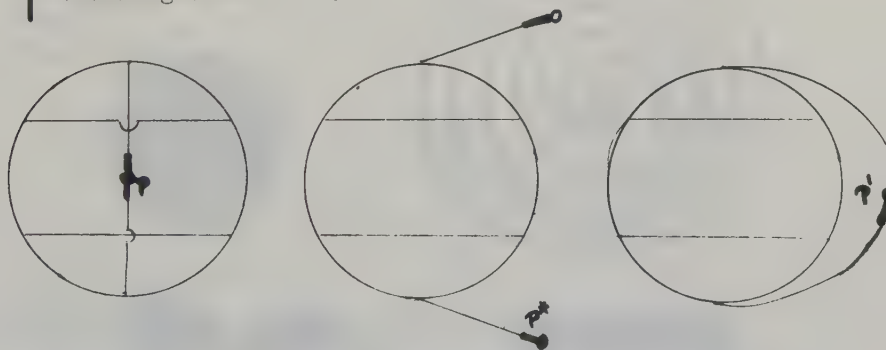
A73 Eine Strecke ist zu jeder Halbkreislinie topologisch äquivalent.

A74 Alle Rechtecksflächen sind zueinander topologisch äquivalent.

Bemerkung: Alle genannten geometrischen Figuren sind als Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ aufzufassen und jeweils mit der Spurtopologie zur natürlichen Topologie zu verstehen.

Wir haben jetzt eine recht gute anschauliche Vorstellung von der Wirkung topologischer Abbildungen (auf ebene oder räumliche Punktmengen) gewonnen. Der Vergleich der elastischen Deformation drängt sich insbesondere bei durch das Gabeltheorem ermöglichten topologischen Abbildungen auf. Auch ohne einen vollständigen Nachweis wird die folgende Formulierung sicher akzeptiert werden:

Zwei Punktmengen sind topologisch äquivalent, wenn sie sich durch eine elastische Deformation (Gummituch!) ineinander überführen lassen. Dabei darf die zu verformende Figur auch "zerschnitten" werden, wenn sie nur an den entsprechenden Stellen wieder zusammengesetzt wird.



Ein "Zerschneiden" würde zwar die Bijektivität der Verformung nicht unbedingt stören. Die Verformung muss jedoch auch in beiden Richtungen stetig erfolgen, d.h. alle Umgebungen aller Punkte P müssen in Umgebungen der Bildpunkte P' überführt werden, deshalb ist das Zusammensetzen unumgänglich.

A75

Welche der folgenden Punktmengen sind topologisch äquivalent?

a)



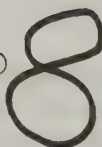
b)



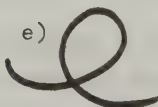
c)



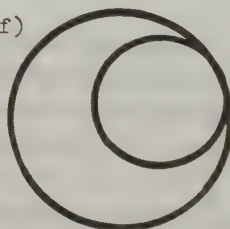
d)



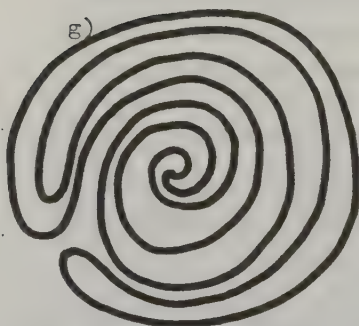
e)



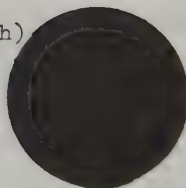
f)



g)



h)



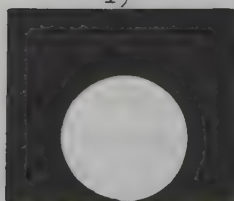
i)



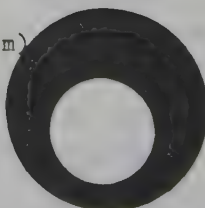
k)



l)



m)



n)



Zwei spezielle Klassen topologisch äquivalenter Punktmengen seien noch ihrer Bedeutung wegen eigens erwähnt:

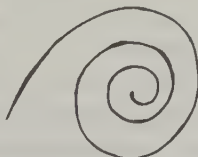
(8.3) Ein (Jordanscher Kurven-) Bogen ist ein topologisches Bild des Intervalles $[0,1]$

B38 Anschaulich versteht man unter Bögen Punktmengen der Form

a)



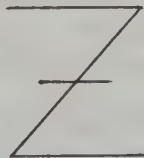
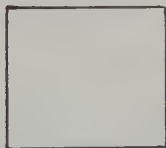
c)



b)



A76 Erläutern Sie, warum die folgenden Punktmengen keine Bögen sind:



A77 Zeigen Sie: Je zwei Bögen sind zueinander topologisch äquivalent.

(8.4) Ein topologisches Bild einer Kreislinie nennt man Jordankurve.

B39 Die Schienen einer Achterbahn beschreiben eine Jordankurve (wenn man sie als räumlich nicht ausgedehnt idealisiert).

A78 Welche Blockbuchstaben des lateinischen Alphabets sind Jordankurven? Welche sind Bögen?

§ 9 Unikursale Netze

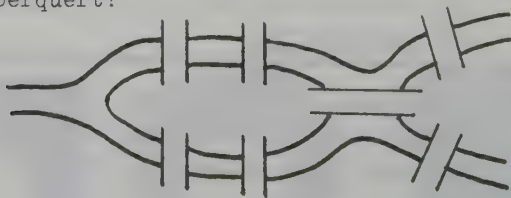
Einige Probleme der anschaulichen Topologie können mit recht geringem Zeitaufwand in vergnüglicher Weise behandelt werden. Besonders der Komplex der Durchlaufbarkeit von Netzen lässt sich sehr einfach systematisieren und vollständig klären. Er erschien deshalb besonders geeignet, einen Einblick in dieses Teilgebiet der Topologie zu geben.

Zusätzlich zu der üblichen Abhandlung dieser Probleme¹⁾ werden sie in diesem Lehrgang noch mit einem mengentheoretischen Hintergrund versehen, was erst klarstellt, dass es sich hier tatsächlich um topologische Aufgabenstellungen handelt. Die Beweise dieses Abschnitts benötigen jedoch diesen Hintergrund nicht. Sie wurden sämtlich, wie auch ein Teil der Beispiele, aus B. Arnold, "Elementare Topologie"²⁾ entnommen.

Motivationsprobleme stellen sich bei den folgenden Aufgaben, die auch in einer Rätselecke einer Zeitschrift auftauchen könnten, nicht.

A79 (Königsberger Brückenproblem)

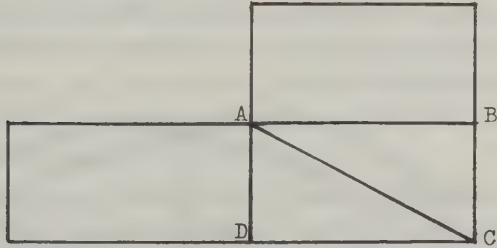
Durch Königsberg fließt der Pregel, über den früher 7 Brücken führten (s. Skizze). Frage; Ist es möglich, so durch alle Stadtteile zu gehen, dass man jede der 7 Brücken genau einmal überquert?



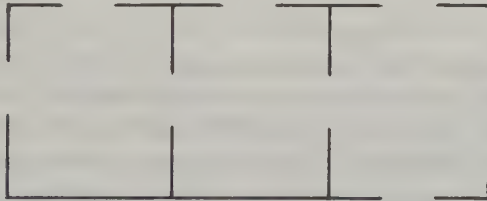
¹⁾ s. Nr. (2) u. (37) Litverz.

²⁾ s. Nr. (2)

- A80 Die Äcker von 4 Bauern sollen durch Draht gegeneinander abgegrenzt werden. Ist es möglich, das so zu tun, dass der Draht nicht zerschnitten und nirgends doppelt verlegt werden muss?



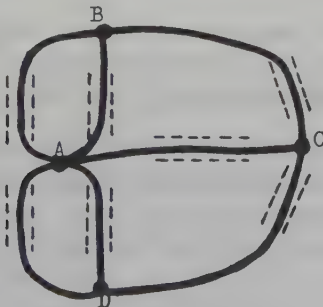
- A81 Ein - etwas unpraktisch gebautes - einstöckiges Haus hat diesen Grundriss:



Gibt es einen Weg durch das Haus, der genau einmal durch jede Tür führt?

Diese Aufgaben scheinen zunächst nichts miteinander zu tun zu haben. Das ändert sich, wenn man sich in allen drei Fällen eine Skizze des zurückzulegenden Weges macht:

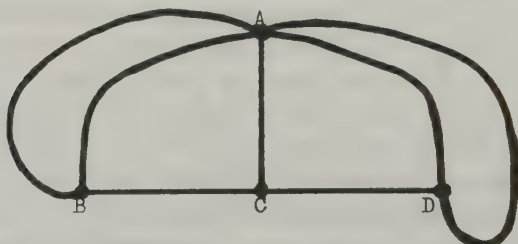
A79



Wie man sieht, wird jeder Stadtteil durch einen Punkt und jede Brücke durch ein Wegstück (Bogen) ersetzt.

A80 Hier hat man die Lösungsskizze durch die Grenzlinien der Grundstücke bereits vorliegen.

A81 Man verfährt wie in A79. Zusätzlich muss jedoch das Gebiet ausserhalb des Hauses als weiteres "Zimmer" (das damit in der Skizze als Punkt erscheint) aufgefasst werden.



Die drei Lösungsskizzen zeigen topologisch äquivalente Figuren, wie man sich durch übereinstimmende Bezeichnung der entsprechenden Punkte klar macht. Man kann deshalb vermuten, dass sich alle drei Aufgaben, wenn überhaupt, auf dieselbe Weise lösen lassen. Man muss dazu allerdings klären, dass es sich hier tatsächlich um ein topologisches Problem handelt, das deshalb invariant ist gegenüber topologischen Abbildungen:

Die Lösungsfiguren setzen sich aus mehreren Bögen zusammen, man definiert daher

- (9.1) a) Ein Netz ist eine Vereinigung von endlich vielen Bögen.
b) Unter einer Ecke eines Netzes versteht man ein Ende eines zum Netz gehörigen Bogens.

Ein Weg durch ein Netz ist eine Folge von Bögen, die in einem Zug durchfahren werden kann. Auch wenn man nicht verlangt, dass kein Bogen mehrfach durchfahren werden darf, ist ein solcher Weg i.a.

kein Bogen, denn ein Bogen ist das Bild einer topologischen (bijektiven!) Abbildung $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Da unser Weg aber keine Sprünge machen soll, wird man sinnvollerweise auf die Stetigkeit nicht verzichten wollen.

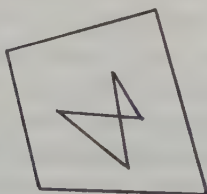
Die Forderung, dass kein Bogen des Netzes doppelt durchlaufen werden darf, sichert man am besten dadurch ab, dass man festsetzt, dass höchstens endlich viele Punkte (die Ecken des Netzes) mehrfach als Bilder auftreten dürfen:

(9.2) a) Ein Weg ist das Bild einer stetigen Abbildung $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

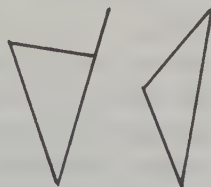
b) Ein Weg heisst unikursal, wenn die Menge $\{x: \bigvee_y y \neq x \wedge f(x) = f(y)\} \subset [0,1]$ endlich ist.

Schliesslich interessieren wir uns aus naheliegenden Gründen nicht für Netze wie die folgenden:

a)



b)



(9.3) Ein Netz heisst wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten des Netzes einen Verbindungsweg innerhalb des Netzes gibt.

Unsere Problemstellung lautet nun so:

Gibt es einen unikursalen Weg, der den zur Aufgabe gehörigen Netz entspricht?

Das ist nun ohne Zweifel eine topologische Problematik, denn

a) das topologische Bild eines Weges ist ein Weg

(Verkettet man eine stetige Abbildung mit einer topologischen, so erhält man eine stetige Abbildung - wegen (7.8))

b) ist ein Weg unikursal, so auch das topologische Bild des Weges

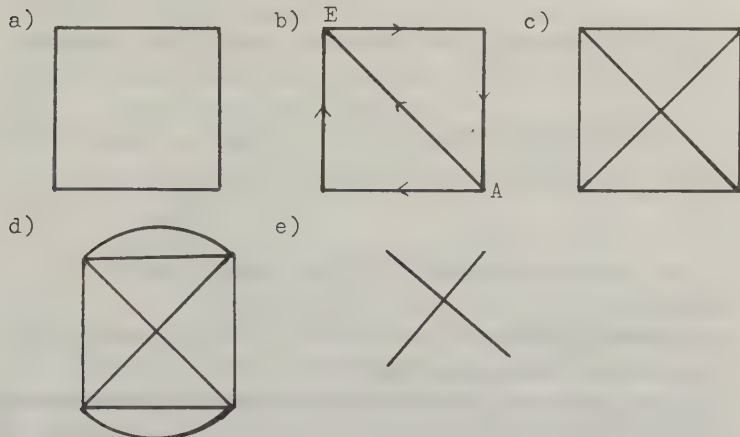
(eine topologische Abbildung ist bijektiv)

Hat man also auf einem Netz einen unikursalen Weg vorliegen, der das gesamte Netz erfasst, so sicher auch auf jedem topologisch äquivalenten Netz.

Es ist durchaus nicht unnötig, diese exakte topologische Begriffsbildung vorzunehmen. Nur so kann begründet behauptet werden, dass das vorliegende Problem in allen topologisch äquivalenten Netzen auf dieselbe Weise lösbar ist.

Nachdem nun geklärt ist, dass es sich bei der Durchlaufbarkeit von Netzen wirklich um ein topologisches Problem handelt, kann seine allgemeine Lösung in Angriff genommen werden. Diese Lösung benötigt aber nicht die bisher erarbeiteten topologischen Grundlagen und steht daher in einem deutlichen Kontrast zu den übrigen Überlegungen dieses Kurses. Sie ist deshalb hier nur der Vollständigkeit halber ausgeführt. Es wurde schon erwähnt, dass die folgenden Darstellungen sich sehr stark an Arnold (Litverz. Nr. (2)) orientieren.

Den Lösungsansatz liefern einige einfache Beispiele:



An diesen Beispielen erkennen wir ganz deutlich, dass die Lösbarkeit solcher Aufgaben nicht von der Anzahl der Bögen bzw. der Ecken im Netz abhängt. Die spezielle Lage der Bögen und Ecken spielt bei topologischen Fragestellungen sicher keine Rolle, sodass als Kriterium lediglich die Beschaffenheit der Ecken, insbesondere die Anzahl der Bögen, die in einem Eck enden, in Frage kommt.

Die Beispiele machen unmittelbar darauf aufmerksam, dass nur die Ecken mit einer ungeraden Anzahl von Bogenenden Schwierigkeiten machen. Zur Begriffsvereinfachung definiert man:

- (9.4) a) Die Anzahl der Bogenenden, die in einem Eck zusammenlaufen, nennt man die Ordnung der Ecke.
- b) Eine (un)gerade Ecke ist eine Ecke (un)gerader Ordnung.

Die geraden Ecken können sicher keine Rolle für die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe spielen, da sie sich in demselben Netz beliebig variieren lassen:



Dagegen bringt uns die Betrachtung der Anzahl der ungeraden Ecken rasch weiter:

(9.5) Hat ein Netz mehr als zwei ungerade Ecken, so lässt es sich nicht durch einen unikursalen Weg ersetzen.

Beweis: Eine Ecke E eines unikursalen Weges, die weder Anfangs- noch Endecke ist, muss gerade sein, da es zu jedem "ankommenden" auch einen "weglaufenden" Bogen geben muss. Ein unikursaler Weg hat also höchstens 2 ungerade Ecken.

Fazit: Unsere drei Eingangsprobleme (A79 - A 81) sind nicht lösbar, da alle drei Netze je 4 ungerade Ecken aufweisen.

Zu untersuchen sind jetzt noch Netze mit 0, 1 oder 2 ungeraden Ecken.

A82 Zeichnen Sie zu jedem der genannten Fälle ein Netz.

Es gelingt offensichtlich nicht, ein Netz mit einem ungeraden Eck zu zeichnen. Zu beweisen ist also,

dass es ein solches Netz gar nicht gibt:

(9.6) Die Anzahl der ungeraden Ecken in einem Netz ist immer gerade.

Beweis: Einzuführen sind einige abkürzende Bezeichnungen:

B sei die Anzahl aller Bogenenden im Netz.
k sei die höchste auftretende Eckenordnung.
 n_i sei die Anzahl der Ecken mit der Ordnung i.
U sei die Anzahl der ungeraden Ecken.

Setzen wir noch voraus, dass k gerade sei
(im anderen Fall verläuft der Beweis ganz analog). Dann gilt

(a) B ist eine gerade Zahl.

(Jeder Bogen hat zwei Enden)

(b) $B = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + (k-1) \cdot n_{k-1} + k \cdot n_k$

(c) $U = n_1 + n_3 + n_5 + \dots + n_{k-1}$

(b) und (c) ergeben

(d) $B - U = 2 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 + \dots + (k-2) \cdot n_{k-1} + k \cdot n_k$

B-U ist also eine gerade Zahl.

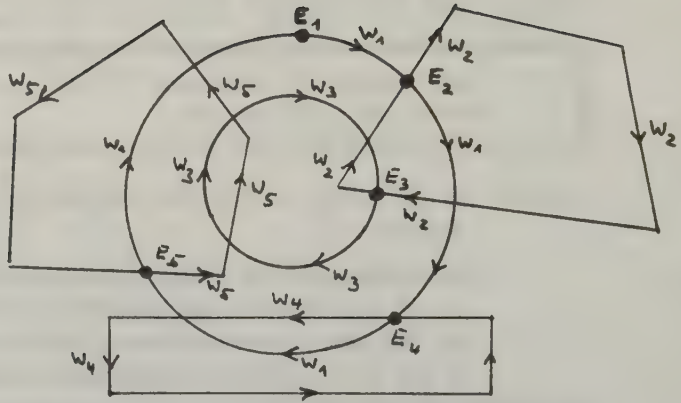
Wegen (a) und (d) ist auch

$U = B - (B - U)$ gerade.

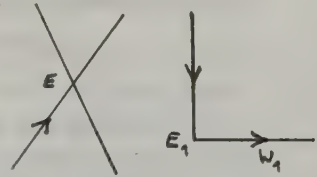
Damit verbleiben die Netze ohne und die mit zwei ungeraden Ecken.

(9.7) Ein wegzusammenhängendes Netz ohne ungerade Ecken ist immer durch einen unikursalen Weg zu ersetzen.

Beweis:



Man durchläuft von einer beliebigen Anfangsecke E_1 aus innerhalb des Netzes so lange wie möglich einen unikursalen Weg. Kann dieser nicht mehr fortgesetzt werden, so ist man sicher wieder in E_1 angelangt, denn in jedem anderen Eck gibt es zu jedem ankommenden Bogen auch einen weglaufernden (alle Ecken sind gerade).



Hat man nun mit dem entstandenen Weg w_1 das gesamte Netz durchlaufen, so ist die Aufgabe gelöst.

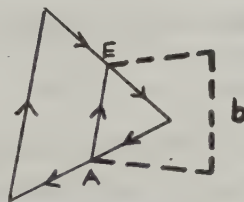
Wenn nicht, so gibt es - denn das Netz ist wegzusammenhängend - innerhalb von w_1 noch eine Ecke E_2 , in der noch mindestens ein 'freier' Bogen endet. Von E_2 aus durchläuft man nun in der Menge der noch freien Bögen einen weiteren unikursalen Weg w_2 , der notwendigerweise wieder in E_2 enden muss. Die beiden Wege w_1 und w_2 setzt man anschliessend in naheliegender Weise zu einem unikursalen Weg zusammen.

Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis das gesamte Netz erfasst ist. Das ist immer mit endlich vielen Schritten möglich, da das Netz nur aus endlich vielen Bögen besteht.

Schliesslich fehlt noch

(9.8) Ein zusammenhängendes Netz mit zwei ungeraden Ecken kann durch einen unikursalen Weg ersetzt werden. Die ungeraden Ecken müssen dabei Anfangs- und Endecke des Weges sein.

Beweis: Verbindet man die ungeraden Ecken durch einen zusätzlichen Bogen b , so erhält man ein Netz ohne ungerade Ecken,



das sich nach (9.7) durch einen unikursalen Weg ersetzen lässt. Lässt man anschliessend b wieder weg, so bleibt ein unikursaler Weg, dessen Anfangs-

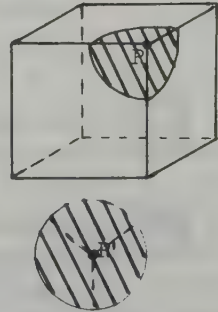
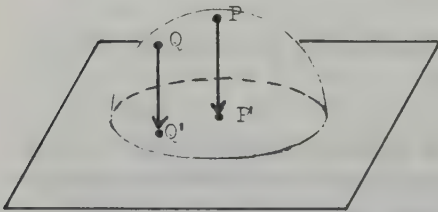
und Endecke die ungeraden Ecken sind. Wegen (9.5) müssen die ungeraden Ecken Anfangs- und Endecke sein.

- A83** Lösen Sie das Königsberger Brückenproblem mit 8 bzw. 9 Brücken.
- A84** In welchen Fällen lässt sich ein Netz, das aus einem regelmässigen n -Eck mit allen Diagonalen besteht, durch einen unikursalen Weg ersetzen?
- A85** Zeichnen Sie Grundrisse von Häusern, in denen A81 mit beliebigem Ausgangspunkt bzw. nur mit bestimmten Ausgangspunkten lösbar ist.
- A86** Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass ein wegzusammenhängendes Netz mit $2n$ ungeraden Ecken sich durch n unikursale Wege ersetzen lässt.

§ 10 Topologische Mannigfaltigkeiten

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass dieses Kapitel keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Es werden lediglich einige interessante Einzelheiten besprochen. In diesem Sinne seien auch die folgenden Bemerkungen zum Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit zu verstehen. Sie mögen vielleicht auch eine interessante Ergänzung zum Dimensionsbegriff und seiner Definition in der analytischen Geometrie darstellen.

Viele Flächen, wie Kugel-, Ring- oder Würfeloberfläche, sind nicht eben, auch wenn man alles noch als "eben" bezeichnet, was sich topologisch in die Ebene abbilden lässt. Trotzdem empfindet man diese Flächen als zweidimensional. Das liegt daran, dass sie sich "stückweise" durchaus topologisch in die Ebene abbilden lassen:



Ähnlich verhält es sich mit einer Kreislinie, die zwar selbst kein Geradenstück ist, die sich aber in Teilen topologisch zu einem Geradenstück (bzw. sogar zu einer Geraden) verformen lässt; (s.B38 und S. 152 o.)

Was man in topologischen Räumen unter dem Begriff "n-dimensional" verstehen will, kann daher so beschrieben werden:

(10.1) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heisst n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung gibt, die zur offenen Einheitskugel $K(0,1)$ in $\mathbb{R}^n$ topologisch äquivalent ist. ¹⁾

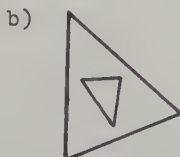
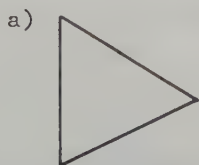
Einige einfache Übungen:

A87 Zeigen Sie: $\mathbb{R}^n$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit. (Dimension?)

A88 Ist ein Bogen eine eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit?

A89 Entfernt man aus einer Kreislinie einen Punkt, so entsteht wieder eine eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

A90 Welche der folgenden Netze sind topologische Mannigfaltigkeiten?



¹⁾ Auf das üblicherweise noch geforderte Hausdorffaxiom wird hier verzichtet, weil es

- sich im Rahmen dieser nicht sehr tiefgreifenden Überlegungen nicht motivieren läßt
- noch nicht zur Verfügung steht
- bei den angeführten Beispielen immer erfüllt ist.

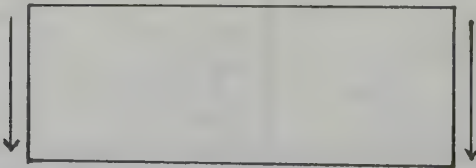
A91 Die folgenden Punktmengen sind mit der natürlichen Topologie versehen. Beurteilen Sie, ob Mannigfaltigkeiten vorliegen und geben Sie gegebenenfalls die Dimension an:

- a) Eine dreidimensionale Kugel mit (ohne) ihre Oberfläche
- b) Eine Kugeloberfläche
- c) Die Vereinigung der Oberflächen zweier Kugeln, die sich berühren (sich durchdringen)
- d) Der Graph einer stetigen Funktion in $\mathbb{R}$

A92 Zeigen Sie, dass nur offene Punktmengen (aus $\mathbb{R}^3$) dreidimensionale topologische Mannigfaltigkeiten sein können.

Es gibt aber nicht offene (sogar abgeschlossene) Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, die zwei- bzw. eindimensionale Mannigfaltigkeiten sind. Geben Sie dafür ein Beispiel an!

Verschiedene interessante zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeiten lassen sich auch durch Rechtecke veranschaulichen. Zunächst einmal natürlich das Rechteck selbst (ohne seinen Rand!), dann aber auch ein Zylindermantel:

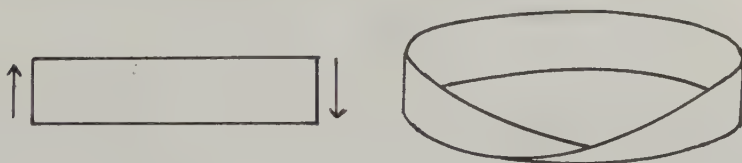


Rollt man nämlich einen Zylindermantel in die Ebene ab, so entsteht ein Rechteck.

Umgekehrt: Heftet man zwei gegenüberliegende Seiten eines Rechtecks zusammen, so entsteht ein Zylindermantel (die Pfeile in der Skizze sollen die Orientierung der Seiten andeuten).

- A93** Ist das Rechteck, das man aus dem Zylindermantel durch Aufschneiden erhält, noch eine topologische Mannigfaltigkeit?

Eine Fläche, die verblüffenderweise keine Vorder- und Rückseite hat (Man versuche, die Fläche einseitig zu bemalen!), entsteht, wenn man die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks im entgegengesetzten Sinn zusammenheftet: das Möbiusband.



- A94** Lässt sich auch ein Kreisring durch ein geheftetes Rechteck darstellen?

Kapitel ~ IV

Z U S A M M E N H Ä N G E N D E

T O P O L O G I S C H E

R Ä U M E

Der Begriff des Intervalles spielt in der Analysis immer wieder eine wichtige Rolle. Auch eine topologisch ausgerichtete Analysis kann nicht auf ihn verzichten, wie die Behandlung der stetigen Abbildungen in § 7 deutlich gezeigt hat; sie wird ihn sogar verstärkt einsetzen. Andererseits sind die Intervalle nicht topologisch definiert, sodass in beliebigen topologischen Räumen zunächst keine entsprechenden Mengen zu existieren scheinen.

In einem Kurs, dessen wichtigstes didaktisches Ziel die Mathematisierung und Verallgemeinerung spezieller Sachverhalte ist, ist damit bereits eine eindeutige Aufgabenstellung gegeben.

Einen Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe hat man mit der Definition wegzusammenhängender Netze in (9.3) schon vorliegen, da jedes Intervall offensichtlich ein wegzusammenhängendes Netz ist.

Der Wegzusammenhang ist nun zwar ein topologischer Begriff; in seine Definition geht aber die Struktur des Kontinuums ein, weshalb sie in allgemeinen Räumen nicht immer in naheliegender Weise verifiziert werden kann. In dieser Beziehung ist der Begriff "Zusammenhang" handlicher. Seine nicht unbedingt naheliegende Definition lässt sich gerade dadurch sinnvoll begründen, dass man an einem Beispiel zeigt, dass auch anschaulich völlig offensichtliche Situationen der Definition des Wegzusammenhanges nicht ohne weiteres zugänglich sind. Dies ist einer der Gründe, die für die Behandlung der zusammenhängenden Räume gerade im Anschluss an anschaulich topologische Probleme sprechen. Weiter klang in § 9 bereits der wichtige Zwischenwertsatz an, der sich in ganz einfacher Weise aus dem Studium zusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{R}$ ergibt. Als Anwendung ergibt sich auch ohne Mühe eine allerdings stark abgeschwächte Formulierung des Jordanschen Kurvensatzes, der durchaus

in die Kategorie der in Kap. III behandelten anschaulich topologischen Probleme (die sich bei topologischen Abbildungen nicht ändern) eingeordnet werden kann. Schliesslich kann Kap. IV sowohl (in Bezug auf den Schwierigkeitsgrad) ein würdiger Abschluss eines Topologiekurses sein als auch als Überleitung zu Kap. V dienen, das sich ganz der Anwendung der zuvor erarbeiteten topologischen Grundbegriffe in der Analysis zuwendet.

Die Behandlung der zusammenhängenden Räume fördert sicher das Verständnis für Sinn und Inhalt der Definition der Vollständigkeit, auch wenn diese wichtige Eigenschaft von IR in diesem Kurs nicht eigens behandelt wird, da sie sich wohl kaum in der angestrebten (mathematisierenden) Weise organisch einfügen liesse. Eine Definition, die nur topologische Begriffe verwendet, benötigt die Theorie der uniformen Räume¹⁾ und wäre in einem Topologiekurs für die Kollegstufe wohl nicht mehr vertretbar. Auch die Tatsache, dass die Vollständigkeit keine Invariante bei topologischen Abbildungen ist und damit im strengen Sinne nicht als topologischer Begriff bezeichnet werden kann²⁾, ist ein Argument dafür, sie im Rahmen dieser Arbeit nicht eigens herauszustellen. Freilich wird die Vollständigkeit von IR an einigen Stellen benutzt, allerdings recht intuitiv und in anschaulicher Umschreibung, da fundierte Kenntnisse wohl kaum vorausgesetzt werden können.

¹⁾ s. (14) S. 122

²⁾ s. (2) S. 32

§ 11 Zusammenhängende Räume

Die in (9.2) und (9.3) gegebenen Definitionen des Weges und des Wegzusammenhangs lassen sich leicht verallgemeinern:

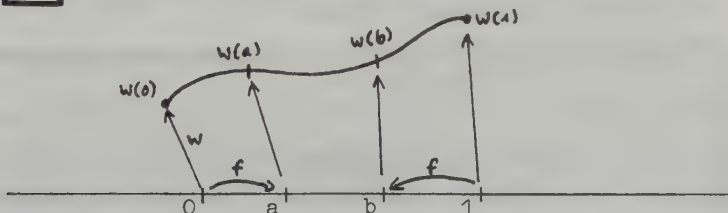
(X, τ) top. Raum, $W \subset X$

(11.1) a) W ist ein Weg in X , wenn es eine stetige Abbildung $w: [0,1] \longrightarrow X$ gibt mit $w([0,1]) = W$.

b) X heisst wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten von X einen Verbindungsweg W in X gibt.

Schwerer fällt die Bereitstellung von Beispielen, die von den bereits bekannten abweichen. Offensichtlich ist zunächst

B40 Jeder Weg ist wegzusammenhängend.



Durch Vorschalten einer stetigen Abbildung $f: [0,1] \longrightarrow [a,b]$ vor die stetige Abbildung $w: [0,1] \longrightarrow W$ erhält man einen Verbindungsweg $W' \subset W$ der Punkte $x_1 = w(a)$ und $x_2 = w(b)$. f ist leicht zu konstruieren:

$$f(x) = a + (b-a) \cdot x$$

A95 Jede offene oder abgeschlossene Kreisscheibe (in $\mathbb{R}^2$) ist wegzusammenhängend.

Weitere Beispiele in $\mathbb{R}^n$ sind leicht zusammenzustellen. In Räumen, die mit einer anderen als der natürlichen Topologie versehen sind, wird man aber nur schwer imstande sein, Wege anzugeben, da dieser Begriff doch stark anschaulich geprägt ist. Lediglich ein triviales Beispiel bietet sich an:

B41 Jeder einelementige topologische Raum ist wegzusammenhängend.

In $X = \{a\}$ gibt es nur ein mögliches Punktepaar: (a, a)

Es bietet sich auch nur ein Verbindungsweg an:

$$\begin{array}{lcl} w: [0,1] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X \\ x & \mapsto & a \end{array}$$

ist als konstante Abbildung natürlich stetig.

Eine entsprechende Untersuchung etwa des Raumes $X = \{a, b\}$ - der als Teilraum von $\mathbb{R}^n$ verstanden werden kann - ist nicht so einfach¹⁾. Sie führt auf die Definition des Zusammenhanges:

(X, τ) top. Raum

(11.2) X heisst zusammenhängend, wenn es ausser $\emptyset$ und X keine Teilmenge von X gibt, die zugleich offen und abgeschlossen ist.

In $X = \{a, b\}$ gibt es nämlich die nichtleeren echten Teilmengen $\{a\}$ und $\{b\}$, die zugleich offen und abge-

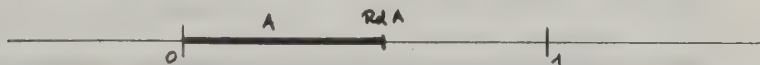
¹⁾ s. Unterrichtseinheit 4 in IV.2 S. 258 ff.

geschlossen sind. Deren Urbilder in $[0,1]$ müssten dann dieselbe Eigenschaft haben. Zu zeigen bleibt also:

B42 Das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ ist zusammenhängend.

Der Beweis ist nicht einfach und bedarf deshalb einer ausführlicheren Schilderung¹⁾.

Anschaulich ist dieser Sachverhalt so zu deuten, dass jede nichtleere echte Teilmenge von $[0,1]$ in $[0,1]$ einen nichtleeren Rand besitzt.



Die Überlegungen, die zu (11.2) geführt haben, kann man sehr leicht auf endliche metrische Räume (und damit auf jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) übertragen:

A96 Zeigen Sie, dass ein endlicher metrischer Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn er wegzusammenhängend ist (d.h. wenn er höchstens ein Element besitzt).

Wir werden auf diese Beziehung später noch ausführlicher eingehen. Im Moment muss die - etwas unanschauliche - Definition (11.2) durch weitere Beispiele gefestigt werden.

A97 Zeigen Sie, dass der topologische Raum (X, τ) mit $X = \{a,b,c,d\}$ und $\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, \emptyset, X\}$

nicht zusammenhängend ist.

Versuchen Sie diesen Mangel durch eine möglichst geringe Änderung der Topologie zu beheben.

¹⁾ s. Unterrichtseinheit 4 S. 258 ff.

A98 Auf einer Menge X sei

- a) die triviale Topologie τ_t
- b) die diskrete Topologie τ_d
- c) die co-endliche Topologie τ_c

gegeben. Welche Bedingungen sind an die Menge X jeweils zu stellen, damit der topologische Raum (X, τ) zusammenhängend ist?

Eine Vielzahl von Beispielen erhält man mit Hilfe von B42, wenn man zeigt:

(11.3) Jedes stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

Dieses Ergebnis ist ja auch schon nach den Überlegungen, die zu (11.2) geführt haben, zu vermuten. Interessant dürfte aber sein, ob nicht aufgrund der in § 7 gemachten Erfahrungen eher vermutet wird, das Urbild einer zusammenhängenden Menge sei immer zusammenhängend. Man sollte auch durchaus der Frage nachgehen, woran ein entsprechender Beweis scheitert, und ein Gegenbeispiel angeben. Doch zunächst der Beweis von (11.3): Man erkennt rasch - gerade aufgrund der Kenntnisse aus § 7 - dass er indirekt verlaufen muss:

Es sei X ein zusammenhängender Raum und $f: X \rightarrow Y$ stetig.

Annahme: $f(X) \subset Y$ sei nicht zusammenhängend, d.h. es gibt eine Menge $A \subset f(X)$ mit

- a) $A \neq \emptyset$ und $A \neq f(X)$
- b) A ist offen und abgeschlossen (in Y und damit in $f(X) \subset Y$)

Dann ist a') $\mathbb{F}^1(A) \neq \emptyset$ und $\mathbb{F}^1(A) \neq X$

b') $\mathbb{F}^1(A)$ zugleich offen und abgeschlossen.

X wäre demnach - im Widerspruch zur Voraussetzung - nicht zusammenhängend.

A99 Zeigen Sie, dass ein Urbild der zusammenhängenden Menge $Y = \{a\}$ durchaus nicht zusammenhängend sein muss.

Speziell sollen alle zusammenhängenden Teilmengen in $\mathbb{R}$ ermittelt werden. Die Veranschaulichung von B42 lässt bereits vermuten, wie diese Mengen beschaffen sein müssen:

(11.4) Ein Intervall ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die mit je zwei Elementen a und b auch alle dazwischen liegenden enthält.

Die offenen und die abgeschlossenen Intervalle sind ja schon lange bekannt. Hinzu treten nun die "halboffenen" Intervalle

$$[a, b[:= \{x: a \leq x < b\}$$

und $]c, d] := \{x: c < x \leq d\}$



Sowohl die offenen als auch ^{die} abgeschlossenen und die halboffenen Intervalle sind Schnittmengen von "einseitig unbeschränkten" Intervallen der Form



bzw.



Auch solche Mengen entsprechen der Definition 11.4, wie schliesslich noch $\mathbb{R}$ und $\emptyset$.

Es wird sich zeigen, dass die Intervalle gerade die zusammenhängenden und die wegzusammenhängenden Teilmengen von IR sind. In IR sind die Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang also gleichwertig. Das gilt zwar nicht in allgemeinen Räumen (s. 11.6), es fällt aber schwer, einfache Beispiele von zusammenhängenden Räumen, die nicht wegzusammenhängend sind, anzugeben. Man könnte sich also fragen, ob man nicht auf einen der beiden Begriffe - und dann wohl auf den Zusammenhang - hätte verzichten sollen. Dass hier nicht so verfahren wurde, liegt daran, dass auf diese Weise kaum eine zeitliche Straffung möglich gewesen wäre (der Nachweis, dass jede wegzusammenhängende Teilmenge von IR ein Intervall ist, benötigt fast alle bisher geführten Überlegungen). Andererseits konnten die notwendigen Verifikationen durch die Einführung des neuen Begriffes - der dann natürlich untersucht werden muss - neu motiviert werden. Darüber hinaus bezieht sich die Definition des Zusammenhanges - im Gegensatz zum Wegzusammenhang - ausschliesslich auf die Topologie des zu untersuchenden Raumes, was sie (besonders ihr Negat) für topologische Überlegungen geeigneter macht.

Man kann jetzt zeigen, dass die Vermutung, die zu Def. (11.4) führte, richtig war:

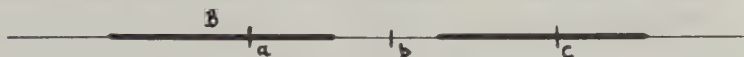
(11.5) Die zusammenhängenden Teilmengen von IR sind gerade die Intervalle.

Die Formulierung der Definition zusammenhängender Räume verlangt geradezu danach, sie zu negieren und mit diesem Negat zu arbeiten: Es bietet sich also ein indirekter Beweis an, wie das auch oben schon der Fall war (s. B42 und 11.3).

Beweis:

" $\Rightarrow$ " $A \subset \mathbb{R}$ sei kein Intervall

$$\Rightarrow \bigvee_{a,b,c \in \mathbb{R}} a < b < c \wedge a, c \in A \wedge b \notin A$$



$$B = A \cap \{x: x < b\} = A \cap \{x: x \leq b\}$$

zeigt, dass A nicht zusammenhängend ist.

Die andere Richtung des Beweises wird wieder indirekt geführt, allerdings am besten in der Form eines Widerspruchsbeweises. Dem liegt die logische Äquivalenz

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow f$$

zugrunde. Diese Beweisform wird durch Verlauf des Beweises nahegelegt, da man an der Stelle (+) offensichtlich die Voraussetzung, dass C ein Intervall ist, benötigt.

" $\Leftarrow$ " Umgekehrt sei nun $C \subset \mathbb{R}$ ein nicht zusammenhängendes Intervall.

Dann gibt es eine echte Teilmenge $D \subset C$, die zugleich offen und abgeschlossen ist.



Es sei $d \in D$ und $e \in C \setminus D$ (o.E. sei $d < e$)

$D \cap [d, e]$ ist dann eine offene und abgeschlossene echte Teilmenge von $C \cap [d, e] = [d, e]$ (+)
(bei der Spurtopologie).

Damit wäre $[d, e]$ nicht zusammenhängend.

Das steht im Widerspruch zu der bereits abgeleiteten Tatsache, dass $[d, e]$ als stetiges Bild von $[0, 1]$ zusammenhängend ist (B42 und (11.3)).

Man hat jetzt alles bereitgestellt, um auch die wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ vollständig zu kennzeichnen:

A100 Zeigen Sie, dass die Intervalle auch gerade die wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

Der Nachweis, dass jedes Intervall wegzusammenhängend ist, ist sehr einfach und hätte schon früher geführt werden können (s. B40). Die Umkehrung verläuft analog zu der entsprechenden Richtung von (11.5) und kann diesen Beweis daher sehr schön vertiefen.

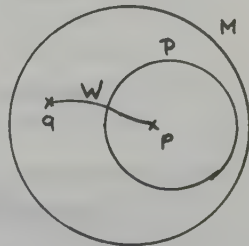
In $\mathbb{R}$ sind also die Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang völlig gleichwertig: die Intervalle haben beide Eigenschaften, alle anderen Teilmengen von $\mathbb{R}$ nicht. Die üblichen Veranschaulichungen suggerieren den Verdacht, daß sich diese Beziehung auch verallgemeinern läßt:

a) M sei eine wegzusammenhängende Menge und P eine echte, nicht leere Teilmenge von M .

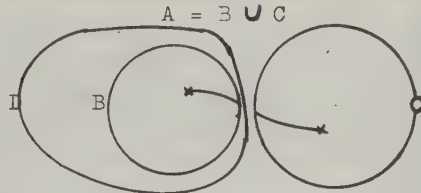
Dann gibt es $p \in P$, $q \in M \setminus P$ und einen Verbindungsweg W (zugehörige Abbildung w).

W muß mindestens einen Randpunkt t von P enthalten. Da W ganz in M enthalten ist, liegt t entweder in P oder in $M \setminus P$:

P kann nicht gleichzeitig offen ($t \notin P$) und abgeschlossen ($t \in P$) sein.



- b) Eine nicht wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ läßt sich etwa so veranschaulichen:



Man kann nun eine Menge D so wählen, daß gilt

$$B = \overset{\circ}{D} \cap A = \overline{D} \cap A$$

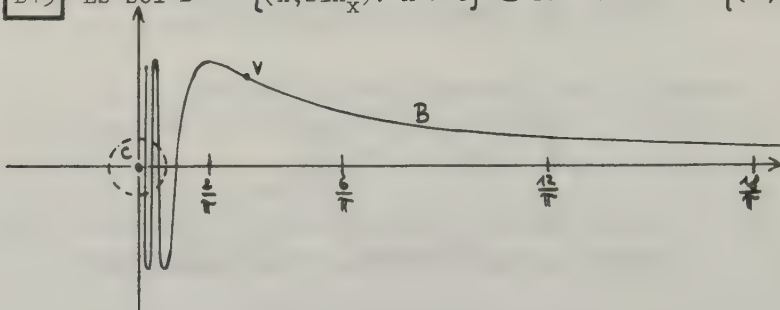
B ist also in A zugleich offen und abgeschlossen:
 A ist nicht zusammenhängend.

Dieses Beispiel ist gut dazu geeignet, darauf hinzuweisen, daß bei anschaulicher Argumentation Vorsicht geboten ist.

In unserem Fall läßt sich a) leicht zu einem exakten Beweis ausbauen, während in b) die Skizze allzusehr vereinfachte:

- a) $\bar{w}^1(P)$ ist eine echte, nichtleere Teilmenge von $[0,1]$ und kann deshalb nicht gleichzeitig offen und abgeschlossen sein (s. B42).
Dasselbe gilt, da w stetig ist, dann natürlich auch für P (s. 7.1 und 7.11).
- b) Die obigen anschaulichen Überlegungen waren nicht allgemeingültig - nicht alle nicht wegzusammenhängenden Mengen lassen sich so einfach darstellen. Man zeigt das - wie immer, wenn es die Ungültigkeit einer Implikation zu demonstrieren gilt - durch ein spezielles Beispiel, das in diesem Fall aber so komplex ist, daß es keinen Beweis, sondern nur Plausibilitätsbetrachtungen zuläßt.

B43 Es sei $B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $C = \{(0,0)\}$



B ist der Graph einer stetigen Abbildung (s. 7.7, 7.10 und B32a) und als solcher zusammenhängend (s. B37, 11.3 und 11.5), denn $\mathbb{R}^+$ ist zusammenhängend. Ebenso ist C zusammenhängend (s. A96)

Mit $A = B \cup C$ hat man eine zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ konstruiert:

Da B und C zusammenhängend sind, ist als einzige Zerlegung von A gerade die in B und C zu untersuchen. C ist aber eine zwar (bezüglich A) abgeschlossene, aber nicht offene Menge. Umgekehrt ist B offen, aber nicht abgeschlossen (jede Umgebung von $(0,0)$ enthält Elemente aus B).

Anschaulich kann man sich klarmachen, daß A nicht wegzusammenhängend ist, denn zu $u = (0,0)$ und $v \in B$ gibt es keinen Verbindungsweg in A:

Beim "Verlassen" des Punktes u müßte die zugehörige stetige Abbildung w einen "Sprung" machen (es gibt keinen zu u "unmittelbar benachbarten" Punkt aus B), was im Widerspruch zur Stetigkeit von w steht.

Insgesamt hat man also:

(11.6) Jede wegzusammenhängende Menge ist auch zusammenhängend.

Die Umkehrung gilt nur für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, was man jedoch höchstens erwähnen, aber nicht beweisen sollte¹⁾, vor allem, da dies im Folgenden nicht benötigt wird.

¹⁾ Zum Beweis s. etwa (12) S. 60. Man kann den Beweis zwar - in Einzelschritte aufgelöst - durchaus vorführen, der Aufwand erscheint jedoch kaum gerechtfertigt.

Aufgaben

- 1) In $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte $P_1(0/1)$ und $P_2(0/-1)$ gegeben. Welche der folgenden Mengen sind zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend)?
- a) $K(P_1, 1)$
 - b) $K(P_1, 1) \cup K(P_2, 1)$
 - c) $K(P_1, 1) \cap K(P_2, 1)$
 - d) $\overline{K(P_1, 1)} \cup \overline{K(P_2, 1)}$
 - e) $K(P_1, 1) \cup \overline{K(P_2, 1)}$
- 2) Ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ mit
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und
 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{2, 4, 5, 7\}, \{1, 4\}, \{4\}, \{1, 2, 4\},$
 $\{4, 5, 7\}, \{1, 2, 4, 5, 7\}, \{1, 4, 5, 7\}, X\}$
zusammenhängend?
- 3) Suchen Sie eine Topologie auf $\mathbb{R}$, bei der $\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend ist. Ist $\mathbb{R}$ dann auch nicht wegzusammenhängend?
- 4) Ist $(X, \mathcal{T})$ mit $X = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ wegzusammenhängend?
- 5) Zeigen Sie: die Vereinigung von nicht disjunkten zusammenhängenden Mengen ergibt eine zusammenhängende Menge.
- 6) Mit einem topologischen Raum ist auch jeder Unterraum zusammenhängend.
Stimmt diese Behauptung?

§ 12 Der Jordansche Kurvensatz

Die Problematik des Jordanschen Kurvensatzes ist sicher nicht von vorneherein offenkundig. Man wird eher geneigt sein, ihn als selbstverständlich hinzunehmen (Venn-Diagramme!!). Er sollte deshalb durch ein nicht ganz triviales Beispiel vorbereitet werden.

A101 Beweisen Sie, dass die folgende Kurve die Ebene in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt:



Lösung: Färben des "Inneren".

Sehr einfach ist dagegen:

A102 Eine Kreislinie zerlegt die Ebene in zwei disjunkte offene und (weg-)zusammenhängende Teilmengen.

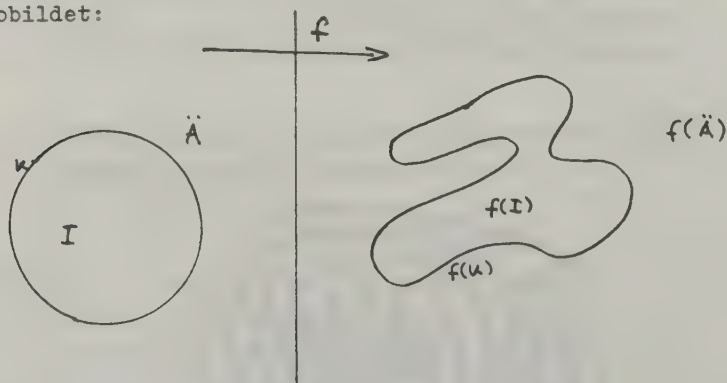
Zur Vereinfachung der Sprechweise definiert man

(X, τ) top. Raum, $G \subset X$

(12.1) G heisst Gebiet $\iff G$ ist offen und zusammenhängend.

B44 Jeder zusammenhängende topologische Raum ist ein Gebiet, also insbesondere $\mathbb{R}^n$.

Jede Kreislinie zerlegt demnach die Ebene in zwei disjunkte Gebiete. Wir zeigen, dass sich das nicht ändert, wenn man die Ebene topologisch auf sich abbildet:



Abkürzungen: K sei die Kreislinie

I sei das Innere der Kreislinie

Ä sei das Äussere der Kreislinie

$f: \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ sei topologisch

Dann ist $\mathbb{R}^2 = I \cup K \cup \bar{A}$

und $I \cap K = I \cap \bar{A} = \bar{A} \cap K = \emptyset$

f ist bijektiv $\implies$

$$\mathbb{R}^2 = f(\mathbb{R}^2) = f(I \cup K \cup \bar{A}) = f(I) \cup f(K) \cup f(\bar{A})$$

$$\text{und } f(I) \cap f(K) = f(I \cap K) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{ebenso } f(I) \cap f(\bar{A}) = \emptyset = f(\bar{A}) \cap f(K)$$

f ist stetig $\implies$

$$f(I) \text{ und } f(\bar{A}) \text{ sind zusammenhängend} \quad (11.3)$$

f^{-1} ist stetig $\implies$

$$f(I) \text{ und } f(\bar{A}) \text{ sind offen}$$

f ist topologisch $\implies$

$$f(K) \text{ ist eine Jordankurve} \quad (8.4)$$

Zusammen: Ist K ein Jordanscher Kurvenbogen, der durch eine topologische Abbildung der Ebene auf sich aus einer Kreislinie erzeugt wird, so zerlegt K die Ebene in 2 disjunkte Gebiete.

Dies ist eine schwache Variante des Jordanschen Kurvensatzes:

(12.2) Jede ebene Jordankurve zerlegt die Ebene in zwei disjunkte Gebiete.

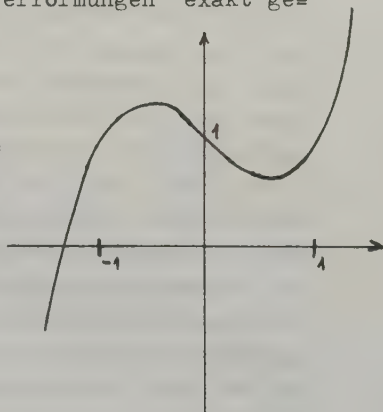
Das ist mit obigen Überlegungen natürlich noch nicht bewiesen. Man müßte ja noch zusätzlich zeigen, daß jede topologische Abbildung einer Kreislinie auf eine ebene Jordankurve zu einer topologischen Abbildung der Ebene auf sich fortgesetzt werden kann. Um diese Frage beurteilen, reichen die bereitgestellten Mittel bei weitem nicht aus¹⁾. So muß man sich damit begnügen, auf Beispiele wie etwa die Kurve von S. 185 zu verweisen und so plausibel zu machen, daß der Beweis für (12.2) noch keineswegs geleistet ist. Schon einfache Beispiele (wie etwa die Verformung der Kreislinie zum Rand eines Quadrates) machen so große Mühe bei der Verifikation, daß der dafür notwendige Zeitaufwand kaum gerechtfertigt erscheint.

¹⁾ Auch der Beweis, den Dold in (19) gibt, benötigt zusätzliche Bedingungen; er bleibt dann noch schwierig genug.

§ 13 Der Zwischenwertsatz

Ebenso selbstverständlich wie der Jordansche Kurvensatz wird häufig der Zwischenwertsatz angewendet, ohne dass er in ausreichender Weise begründet würde. Auch die Tatsache, dass der Graph einer stetigen Funktion in $\mathbb{R}$ als topologisches Bild der "Geraden" $\mathbb{R}$ aufgefasst werden kann (s. B37 S. 151), ist als exakter Beweis nicht ausreichend: zu wenig ist die anschauliche Vorstellung von den topologischen Abbildungen als "elastischen Verformungen" exakt geklärt.

Die Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$ etwa hat keine mit elementaren Methoden zu ermittelnde Nullstelle. Man kann in der Regel in der Schule nur zeigen, dass der Funktionswert sich bei $x_0 = -1,3247$ recht gut an 0 annähert ($f(x_0) \approx -0,00008$).



Zu zeigen ist also:

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$, so gibt es eine reelle Zahl c , die zwischen a und b liegt, mit $f(c) = 0$.

Es ist selbstverständlich, dass dies nicht nur für die spezielle reelle Zahl 0, sondern für alle reellen Zahlen gleichermassen richtig sein muss. Das ist der

(13.1) Zwischenwertsatz

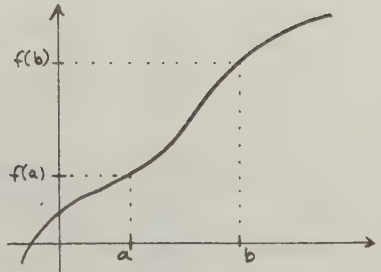
Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = y_0$.
 x_0 liegt zwischen a und b .

Mit anderen Worten:

Das Bild des Intervalles
[a,b] enthält mit $f(a)$
und $f(b)$ auch alle da-
zwischen liegenden Zahlen.

Noch besser wäre

Das Bild des Intervalles [a,b] ist ein Intervall.



Das aber ist sehr einfach zu zeigen:

[a,b] ist ein Intervall $\implies$ (11.5)

[a,b] ist zusammenhängend $\implies$ (11.3)

$f([a,b])$ ist zusammenhängend $\implies$ (11.5)

$f([a,b])$ ist ein Intervall

Eine direkte Folgerung des Zwischenwertsatzes ist

(13.2) Jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades
hat mindestens eine Nullstelle.

Der Beweis fordert allerdings eine nicht gerade nahe-
liegende Abschätzung, die von den Schülern wohl nicht
selbständig erarbeitet werden kann. Wenn man nicht
ganz auf sie verzichten will, so wird man sie selbst
vergeben müssen:

Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1}$ ($a_{2n+1} \neq 0$)
 f ist stetig (s. 7.10)

Division durch a_{2n+1} ergibt die stetige Funktion

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{2n}x^{2n} + x^{2n+1}$$

Setzt man nun $b := \max(|b_1|, 1)$

und $x_1 := (2n+1) \cdot b$,

so ist $g(x_1) \geq 0$ und $g(-x_1) \leq 0$:

$$\begin{aligned}
 g(x_1) &= x_1^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} b_j x_1^j \\
 &\geq x_1^{2n+1} - \sum_{j=0}^{2n} |b_j| \cdot x_1^j \\
 &\geq x_1^{2n+1} - b \cdot \sum_{j=0}^{2n} x_1^j \quad j \leq 2n \implies x_1^j \leq x_1^{2n} \\
 &\geq x_1^{2n+1} - b \cdot (2n+1) \cdot x_1^{2n} \\
 &= x_1^{2n} (x_1 - b \cdot (2n+1)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung ergibt $g(-x_1) \leq 0$.

g (und damit auch f) besitzt also eine Nullstelle.

A103 Für welches $c \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f(x) = x^4 + x^2 + c$ eine Nullstelle?

Eine weitere einfache Folgerung aus dem Zwischenwertsatz ist ein Fixpunktsatz:

(13.3) Ist die Abbildung $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig, so besitzt f einen Fixpunkt x_0 :

$$f(x_0) = x_0$$

Beweis:

1. Fall: $f(a) = a$ fertig
2. Fall: $f(b) = b$ fertig
3. Fall: $a < f(a)$ und $f(b) < b$

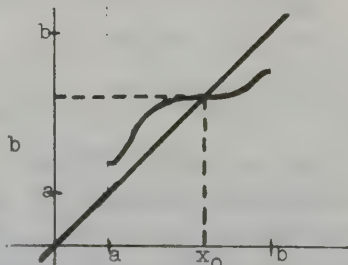
Man setzt:

$$g(x) = x - f(x)$$

g ist stetig (7.9)

und es ist $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$.

nach dem Zwischenwertsatz muss g eine Nullstelle besitzen.



A104 Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{3}$ einen Fixpunkt besitzt.

A105 $f(x) = x^3 - 6$ besitzt in $x_0 = 2$ einen Fixpunkt.

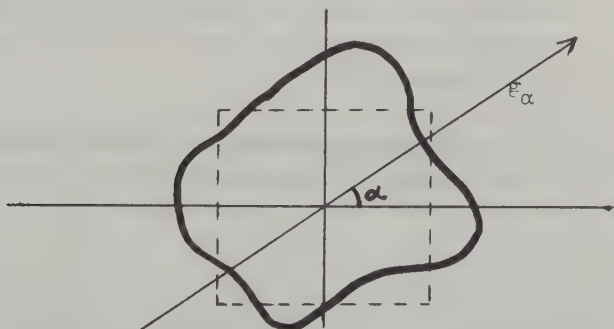
Zeigen Sie, dass dies mit (13.3) nicht nachzuweisen ist.

Zum Schluss noch eine recht amüsante Einzelheit:

B45 Das Schinkenbrötchenproblem:

Kann ein irgendwie mit Schinken belegtes rechteckiges Sandwich gerecht in zwei Hälften zerschnitten werden?

Das Sandwich selbst ist unproblematisch zu zerlegen: Jeder Schnitt durch den Schwerpunkt (Mittelpunkt des Rechteckes) ergibt eine "gerechte" Verteilung.



Legt man nun eine orientierte Gerade g_α unter dem Winkel α gegen die x-Achse durch den Schwerpunkt, so kann man das Gewicht $G_l(\alpha)$ bzw. $G_r(\alpha)$ des Schinkens links bzw. rechts der Geraden bestimmen (das Gewicht des Brotes verteilt sich immer gleichmässig).

Geht man davon aus, dass $G_1(\alpha)$ und $G_r(\alpha)$ zwei stetige Funktionen sind, was man im Regelfall wohl tun kann, so ist

$$f(\alpha) = G_1(\alpha) - G_r(\alpha)$$

ebenfalls stetig.

1. Fall: $f(0) = 0 \implies$ man hat die gerechte Verteilung gefunden.

2. Fall: $f(0) < 0 \implies f(\pi) > 0$

$$\implies \bigvee_{\alpha} 0 < \alpha < \pi \wedge f(\alpha) = 0$$

$\implies$ Eine gerechte Verteilung ist möglich

3. Fall: $f(0) > 0$ analog.

Aufgaben:

- 1.) Zeigen Sie, dass eine ganzrationale Funktion ungeraden Grades jede Zahl $k \in \mathbb{R}$ als Funktionswert annimmt.
- 2.) Gilt der Fixpunktsatz (13.3) auch entsprechend für stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Kapitel V

G R E N Z W E R T E

§ 14 Grenzwert von Funktionen

Die Stetigkeit von Funktionen wird in der Schule meist über den Grenzwertbegriff eingeführt. Dieser Topologiekurs geht nun gerade den umgekehrten Weg.

Das Initialproblem, das zu der neuen Begriffsbildung führt, ist die vertiefte Untersuchung der Stetigkeitseigenschaften von Funktionen. Bislang wurde für vorgegebene Funktionen immer nur verifiziert, ob sie stetig sind oder nicht. Dabei haben sich fast alle "gängigen" Funktionen als stetig erwiesen. Eine - auch anschaulich unterstützte - Vorstellung davon, welche strikte Bedingung die Stetigkeit für Funktionen ist, erhält man, wenn man untersucht, welche "Manipulationen" an einer als stetig erkannten Funktion vorgenommen werden können, ohne dass die entstehende neue Funktion unstetig wird. Interessant erscheinen in diesem Zusammenhang insbesondere zwei Aufgabenstellungen:

- 1) Kann eine stetige Funktion auf einen Punkt ausserhalb des Definitionsbereiches so fortgesetzt werden, dass die entstehende Funktion wieder stetig ist? Wichtig sind hier vor allem Untersuchungen der stetigen Fortsetzbarkeit reellwertiger Funktionen in Definitionslücken.
- 2) Inwieweit kann eine stetige Funktion in einem Punkt ihres Definitionsbereiches abgeändert werden, ohne dass die neue Funktion unstetig wird?

Beide Untersuchungen führen zu ähnlichen Überlegungen und sollen deshalb in einer Problemstellung zusammengefasst werden:

Unter welchen Bedingungen ist es möglich, eine stetige Funktion durch einen neuen Funktionswert in einem beliebigen Punkt (inner- oder ausserhalb des Definitionsbereiches!) so zu ergänzen bzw. abzuändern, dass die neue Funktion wiederum stetig ist?

Üblicherweise werden solche (Grenzwert-)Untersuchungen nur in Berührungspunkten des Definitionsbereiches vorgenommen. Indem an dieser Stelle auf diese einschränkende Bedingung verzichtet wird, gewinnt man einfache Beispiele zur Motivation des Begriffes "Häufungspunkt", der so nicht in der Definition des Grenzwertes, sondern als Bedingung für die Eindeutigkeit des Grenzwertes auftaucht.

Die Zusammenfassung aller nun folgenden Untersuchungen in einer Problemstellung bedingt gewisse begriffliche Schwierigkeiten, da eine solche stetige "Änderung" einer Funktion mit keinem der üblichen Begriffe exakt abgedeckt ist. In Übereinstimmung mit den Anregungen der Schüler, die aufgefordert waren, sich an der Namensfindung zu beteiligen, wird der Begriff "stetige Ergänzung" gewählt, obwohl er in der Literatur abweichend verwendet wird¹). Da man darüber hinaus sinnvollerweise von einer stetigen Ergänzung nur dann sprechen wird, wenn zuvor eine zumindest in einer Teilmenge des Definitionsbereiches stetige Funktion vorliegt, wird in diesem Lehrgang dieser Spezialfall zugrundegelegt.

Zur Vorbereitung der Begriffsbildung braucht man nur wenige Beispiele:

B46

Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{-----}} \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{-----} \rightarrow \frac{x^2 + x}{x}$$

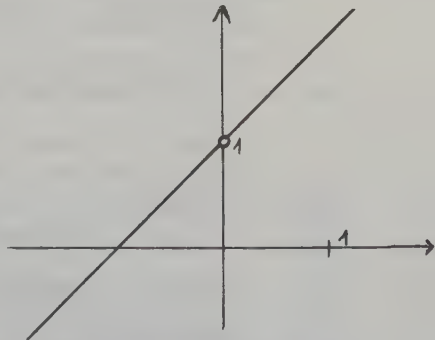
ist bekanntlich stetig (s. 710).

Sie lässt sich in $x_0 = 0$ so ergänzen, dass eine in ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion entsteht:

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$\underline{f}(x) = x + 1$$

Das aber beschreibt eine in ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion.



lässt sich stark vereinfachen:

¹) s. etwa (3) S. 72

B47

Untersucht man entsprechend die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

so stellt man fest, dass eine stetige Ergänzung in $x_0 = 0$ nicht möglich ist:

Setzt man

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

so gibt es immer eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(a)$, deren Urbild keine Umgebung von 0 ist.

In diesem Fall ist eine anschauliche Betrachtung mit Hilfe des Graphen der Abbildung der exakten Verifikation wohl vorzuziehen, wie man ja sehr häufig aufgrund der günstigen topologischen Definitionen ohne Einbusse an Beweiskraft anschaulich argumentieren kann.

Man setzt dabei $U =]b, c[$ mit $a \in]b, c[$ und unterscheidet die beiden Fälle

$$0 \notin]b, c[\implies \underline{f}^{-1}(U) = \{0\} \cup]\frac{1}{c}, \frac{1}{b}[$$

$$0 \in]b, c[\implies \underline{f}^{-1}(U) = \{0\} \cup \{x: x < \frac{1}{b}\} \cup \{x: \frac{1}{c} < x\}$$

In beiden Fällen ist U keine Umgebung von 0.

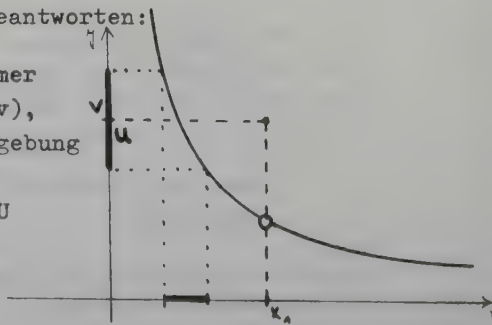
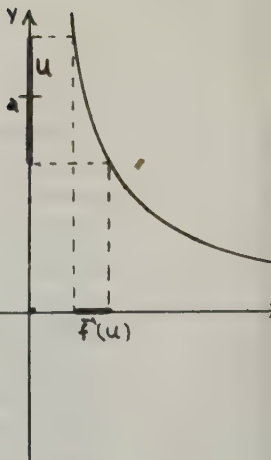
Auch die Frage, ob f in einem Punkt $x_1 \neq 0$ so abgeändert werden kann, dass die neue Funktion

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq x_1 \\ v & \text{für } x = x_1 \end{cases} \text{ stetig ist,}$$

ist sehr einfach zu beantworten:

Für $v \neq \frac{1}{x_1}$ gibt es immer eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(v)$, deren Urbild keine Umgebung von x_1 ist.

Bedingung an U : $\frac{1}{x_1} \notin U$



Durch diese Beispiele wurde die Aufgabenstellung ausreichend umschrieben. Als nächster Schritt wird man sich jetzt aus Formulierungsgründen auf eine Terminologie festlegen. Es wurde schon auseinandergesetzt (s.S. 184), warum hier der Begriff der stetigen Ergänzung gewählt wurde. Da aber keine exakte Übereinstimmung mit der allgemein üblichen Sprechweise besteht, ist es durchaus möglich, sich für eine von den Schülern selbst vorge-schlagene Formulierung zu entscheiden.

Die einführenden Beispiele genügen zwar der üblichen einschränkenden Bedingung ($x_0 \in \bar{A}$), sie reichen aber nicht aus, sie zwingend zu fordern. Da andererseits der Verzicht auf diese Bedingung weitere Begriffsbildungen ermöglicht, ist es günstig, nicht darauf zu bestehen. Ebenso wäre eine Beschränkung nur auf reellwertige Funktionen nicht sinnvoll, da dann die später folgenden Überlegungen, die zum Begriff des Hausdorffraumes führen, nicht motiviert werden könnten.

Es wäre möglich, den Begriff des Grenzwertes aus den angegebenen Beispielen abzulösen. Jede Motivation müsste jedoch beim derzeitigen Kenntnisstand der Schüler recht gezwungen wirken. Er wird deshalb hier einfach als (allgemein übliche) synonyme Sprechweise angegeben. Später kann dann demonstriert werden, dass der Begriff des Grenzwertes viele Situationen (insbesondere bei Folgen) anschaulicher beschreibt als der der stetigen Ergänzung.

Man setzt nun fest:

$(X, \tau), (Y, \tau)$ top. Räume, $A \subseteq X$, $x_0 \in X$
 $f: A \longrightarrow Y$ stetig

(14.1) Ist $\underline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \setminus \{x_0\} \\ b & \text{für } x = x_0 \end{cases}$

stetig, so heisst b stetige Ergänzung oder Grenzwert von f an der Stelle x_0 .

In der Definition wurde der triviale Fall $x_0 \in A$ bewusst mit eingeschlossen. Man erhält so als einfache Folgerung die übliche Grenzwertdefinition der Stetigkeit:

(14.2) Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn in jedem Punkt $x_0 \in X$ der Wert $f(x_0)$ Grenzwert von f an der Stelle x_0 ist.

Spätestens bei der Formulierung von (14.2) wird die sicherlich bekannte Schreibweise

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (+)$$

vermisst werden. Man muss deshalb zeigen, dass die Definition (14.1) keineswegs - wie die einführenden Beispiele zu zeigen scheinen - nur eine eindeutige stetige Ergänzung zulässt. Nur dies aber würde die Schreibweise (+) rechtfertigen.

B48 Die konstante Funktion

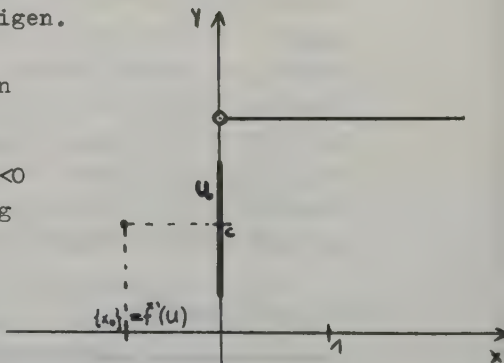
$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2$$

ist in jedem Punkt $x_0 < 0$ völlig beliebig stetig ergänzbar:

Da $\{x_0\}$ in $\mathbb{R}^+ \cup \{x_0\}$ Umgebung von x_0 ist, ist jede Funktion

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x > 0 \\ c & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad \text{in } x_0 \text{ stetig:}$$

Das Urbild jeder Umgebung von c enthält x_0 und ist damit Umgebung von x_0 .



Die Schreibweise $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ist also nur zulässig, wenn b einziger Grenzwert von f an der Stelle x_0 ist.

Wir werden später sehen, dass sie - trotz B48 - für reellwertige Funktionen sinnvoll ist.

Jedenfalls haben wir nun eine interessante Problemstellung:

Unter welchen Bedingungen ist der Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle x_1 eindeutig?

Sie wird uns zu zwei wichtigen Begriffen führen¹⁾: Zum Häufungspunkt einer Menge und zum Hausdorffraum.

Um diese beiden Begriffe getrennt erarbeiten zu können, wurden zunächst nur reellwertige Funktionen, also Funktionen in einem Hausdorffraum, behandelt. Da für sie ausserdem ein Grenzwertbegriff bereits bekannt ist, bieten sie sich sehr gut als Anknüpfungspunkt an.

B48 zeigt: Ist $\{x_0\}$ Umgebung von x_0 in $A \cup \{x_0\}$, so ist jede Funktion $f: A \rightarrow Y$ in x_0 beliebig stetig zu ergänzen.

Solche Punkte sind bei einer Grenzwertbetrachtung also wenig sinnvoll. Man nennt sie - in Übereinstimmung mit der Anschauung - "isoliert" bezüglich A .

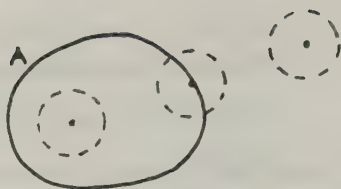
Eindeutige Grenzwerte kann man also nur in nicht isolierten Punkten erwarten. Man nennt sie "Häufungspunkte":

(X, τ) top. Raum, $A \subset X$, $x_0 \in X$

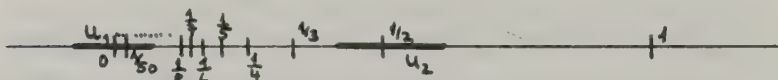
- (14.3) a) x_0 heisst isolierter Punkt bezüglich A
 $\Leftrightarrow \{x_0\}$ ist Umgebung von x_0 in $A \cup \{x_0\}$
b) x_0 heisst Häufungspunkt von A $\Leftrightarrow$
 x_0 ist nicht isoliert bezüglich A

¹⁾ Eine ausführliche Schilderung dieser Ableitung findet man in Unterrichtseinheit 5 (S. 263)

Anschaulich wird man wohl vermuten, dass "Häufungspunkt" und "Berührungspunkt" identische Begriffe seien. Dem begegnet man durch ein Beispiel:



B49 Bezüglich der Menge $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ liegen in $\mathbb{R}$ alle Punkte ausser $x_0 = 0$ isoliert:



0 ist also einziger Häufungspunkt von A.

Will man sich nicht mit dem Begriff des isolierten Punktes begnügen¹⁾, so muss man eine genauere Charakterisierung der Häufungspunkte geben²⁾:

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $A \subset X$, $x_0 \in X$

(14.4) x_0 ist Häufungspunkt von A $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ U \in \mathcal{U}(x_0) \end{array}$$

$U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A \neq \{x_0\}$

Diese Definition zeigt die Beziehung zwischen den Begriffen "Häufungspunkt" und "Berührungspunkt" klarer auf als die übliche Formulierung:

(14.4') x_0 ist Häufungspunkt von A, wenn jede Umgebung von x_0 mindestens einen von x_0 verschiedenen Punkt aus A enthält.

Andererseits dürfte (14.4') einprägsamer sein und auch weniger leicht mit (5.4) verwechselt werden.

¹⁾ Man kann sich aufgrund von (14.3) ja mit einem der beiden Begriffe zufriedengeben. Es gibt jedoch auch Gründe, beide zu besprechen (s. Unterrichtseinheit 5 S. 268)

²⁾ ebenda S. 268

A106 Zeigen Sie, dass jeder Häufungspunkt einer Menge A auch Berührungspunkt von A ist.

- A107**
- a) In $\mathbb{R}$ liegt kein Punkt isoliert (jeder Punkt von $\mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}$).
 - b) $X \neq \emptyset$ sei mit der diskreten Topologie versehen. Zeigen Sie: jeder Punkt von X liegt bezüglich jeder Teilmenge $A \neq \emptyset$ von X isoliert.
 - c) X habe mehr als ein Element. Geben Sie eine Topologie auf X so an, dass jeder Punkt von X Häufungspunkt jeder Teilmenge von X mit mehr als einem Element ist.

Will man nun zeigen, dass mit der Definition des Häufungspunktes noch keineswegs die Gewähr der Eindeutigkeit eines Grenzwertes gegeben ist, so muss man in nicht hausdorffsche Räume ausweichen. Am einfachsten zu überschauen ist ein endlicher Raum:

B50 $X = \{a, b, c\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

Die identische Abbildung in X ist natürlich stetig.

Häufungspunkte von X sind b und c .

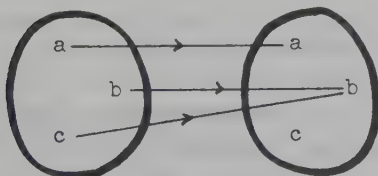
Grenzwerte der Abbildung an der Stelle

$x_0 = b$: a, b, c

$x_1 = c$: b, c

Man muss zur Bestätigung nur jeweils die entsprechend abgeänderte Funktion auf Stetigkeit untersuchen.

Beispiel: b ist Grenzwert an der Stelle $x_1 = c$



$$\underline{f}^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \mathcal{T}$$

$$\underline{f}^{-1}(\{a, b\}) = X \in \mathcal{T}$$

$$\underline{f}^{-1}(X) = X \in \mathcal{T}$$

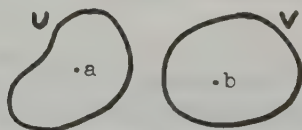
f ist stetig!

Die Definition des Hausdorffraumes ergibt sich nun aus der Diskussion der Eindeutigkeit von Grenzwerten in Häufungspunkten:

Man nimmt an, eine stetige Abbildung habe mehrere Grenzwerte und leitet daraus möglichst einfache Bedingungen ab¹⁾. Das logische Negat dieser Bedingungen impliziert dann, dass die Abbildung höchstens einen Grenzwert haben kann.

Für eine stetige Abbildung $f: X \dashrightarrow Y$ zeigt sich dabei, dass lediglich an den topologischen Raum Y zusätzliche Bedingungen gestellt werden müssen: Zu zwei verschiedenen Punkten aus Y muss es disjunkte Umgebungen geben:

(X, τ) top. Raum, $a, b \in X$		
(14.5) X heisst <u>Hausdorffraum</u> $\Leftrightarrow$ $(a \neq b \implies$ $\bigvee$ $U \in \mathcal{U}(a)$ $\implies$ $\bigvee$ $V \in \mathcal{U}(b)$ $U \cap V = \emptyset$		



und hat nun sofort:

(X, τ) top. Raum, (Y, τ) Hausdorffraum, $A \subset X$, $x_0 \in X$ Häufungspunkt von A , $f: A \dashrightarrow Y$ stetig	
(14.6) f besitzt in x_0 höchstens einen Grenzwert.	

¹⁾ Diese Ableitung wird in Unterrichtseinheit 5 ausführlich geschildert (S. 271)

Vor weiteren Grenzwertberechnungen werden nun Beispiele für den neuentdeckten Begriff zu behandeln sein. Sie erweist sich als praktisch gleichwertig mit der des metrischen Raumes. Da sich schulrelevante Beispiele nicht metrisierbarer hausdorffscher Räume nicht anzubieten scheinen¹⁾, muss man sich mit einem entsprechenden Hinweis begnügen.

B51 Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.

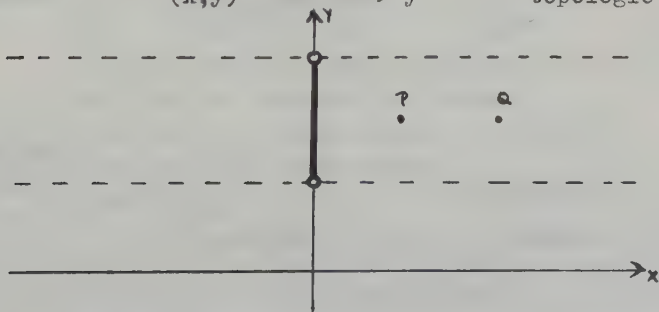


$$\text{Beweis: } a \neq b \implies d(a, b) = r > 0$$

$$s \leq \frac{r}{2} \implies K(a, s) \cap K(b, s) = \emptyset$$

Ein sehr schönes Beispiel für einen nicht hausdorffschen Raum gibt Papy¹⁾:

B52 Die Initialtopologie auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Projektion $p_y: \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}$ ist die "Steifen-
(x, y) $\dashrightarrow$ y topologie".



Punkte mit gleicher Ordinate haben ganz offensichtlich keine disjunkten Umgebungen.

¹⁾ Ein Beispiel eines regulären, aber nicht normalen Hausdorffraumes, der nicht metrisierbar ist, gibt Franz, Litverz. Nr. (5), S. 63

²⁾ s. (28) S. 90

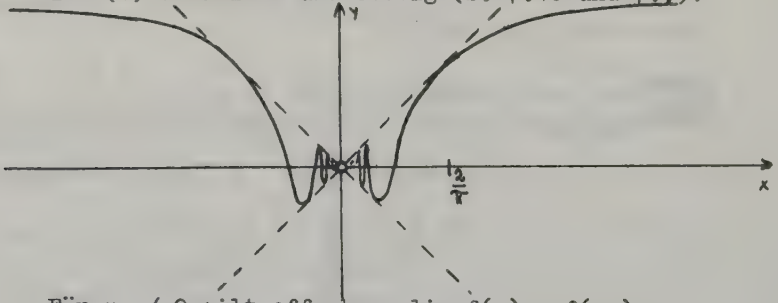
A108 Zeigen Sie, dass ein endlicher Hausdorffraum notwendigerweise mit der diskreten Topologie versehen ist und deshalb metrisch ist.

A109 a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_c)$ ist kein Hausdorffraum.

b) Die identische Abbildung in $\mathbb{N}$ besitzt an jeder Stelle unendlich viele Grenzwerte.

Nachdem nun die Bedingungen für eine sinnvolle Anwendung der Grenzwertdefinition (14.1) geklärt sind, kann man sie durch einige konkrete Grenzwertberechnungen vertiefen:

B53 Die reellwertige Funktion $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ ist in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und stetig (s. 7.10 und 7.7).



Für $x_0 \neq 0$ gilt offenbar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Außerdem ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Wegen $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ hat man

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

und $x \in]-r, r[\implies f(x) \in]-r, r[$

also $] -r, r[\subset \mathbb{I}^1](-r, r[$

$\implies \underline{f}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

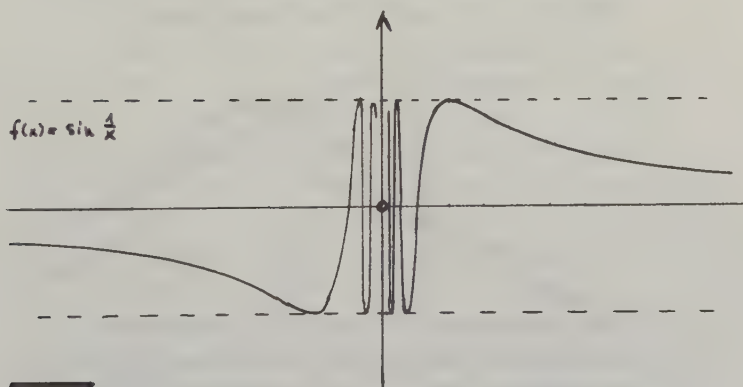
B54

Die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

besitzt in $x_0 = 0$ keinen Grenzwert:

In jeder Umgebung von 0 nimmt f jeden Wert zwischen -1 und 1 an. Eine anschauliche Untersuchung des Graphen bestätigt das so gut, dass ein exakter Nachweis nicht notwendig erscheint.



A110

Zeigen Sie: Die Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 < 2 \\ 2 & \text{für } x^2 > 2 \end{cases} \quad \text{ist stetig.}$$

In welchen Punkten von $\mathbb{R}$ besitzt f einen Grenzwert? Ist der Grenzwert eindeutig?

A111

Zeigen Sie: Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$f \text{ ist stetig} \iff \bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

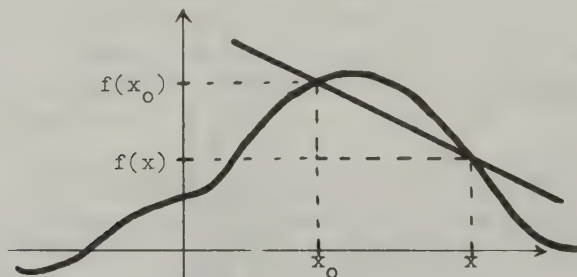
Als wichtigen Spezialfall der stetigen Ergänzung erhält man nun noch die Ableitung einer Funktion:

B55 Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so auch

$$F: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.9)$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$F(x)$ gibt die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ wieder.



$F(x)$ ist wegen (14.6) in x_0 höchstens eindeutig stetig ergänzbar. Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$, so schreibt man

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$$

A112 Berechnen Sie die Ableitung der ganzrationalen Funktion $f(x) = 2x + 3$ an der Stelle $x_0 = 2$

Aufgaben

1.) Bestimmen Sie - wenn möglich - für die reellwertige Funktion $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

2.) Sei $A = \{x: x > 3\} \subset \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie alle Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ einen Grenzwert hat und
 $x \longmapsto 2x+3$

geben Sie den Grenzwert an.

3.) $X = \{a, b, c\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

$Y = \{d, e, f\}$ $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{d, e\}, \{e, f\}, \{e\}, Y\}$

$A = \{a, c\} \subset X$

a) Zeigen Sie: Y ist kein Hausdorffraum

b) Geben Sie eine stetige Abbildung $f: A \longrightarrow Y$
an, die in b mehrere Grenzwerte besitzt.

4.) Auf $\mathbb{N}$ ist eine Topologie gegeben durch

A offen $\iff A$ enthält mit jedem Element alle
Vielfachen des Elements.

Ist $\mathbb{N}$ mit dieser Topologie ein Hausdorffraum?

5.) Zeigen Sie, dass jede quadratische Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$
differenzierbar ist.

6.) Zeigen Sie:

a) Jeder Unterraum eines Hausdorffraumes ist
ein Hausdorffraum.

b) Jedes topologische Bild eines Hausdorff-
raumes ist ein Hausdorffraum.

c) Ein stetiges Bild eines Hausdorffraumes
muss kein Hausdorffraum sein.

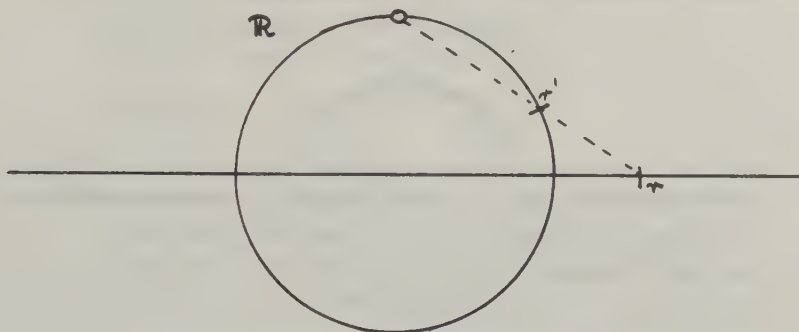
d) Ist $f: X \longrightarrow Y$ stetig und injektiv
und Y ein Hausdorffraum, so ist auch X ein
Hausdorffraum.

§ 15 Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$

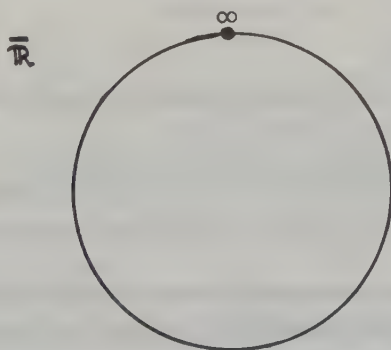
Günstig für die Vorbereitung des Grenzwertes von Folgen ist die Untersuchung des Verhaltens stetiger Funktionen "im Unendlichen", d.h. die Frage nach der Ergänzung stetiger reellwertiger Funktionen in einem zusätzlichen Punkt " ∞ ". Durch den einfachen Übergang zur Spurtopologie auf $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ wird der Grenzwert von Folgen fast zwangsläufig definiert. Man erhält weiterhin bereits Beispiele kompakter Mengen, sodass man später nicht ohne konkreten Hintergrund operieren muss.

Sehr gebräuchlich ist es, abweichend von dem hier vorgestellten Konzept, die Zahlengerade $\mathbb{R}$ durch zwei Punkte $+\infty$ und $-\infty$ zu ergänzen. Dies hat zwar den Vorteil, der anschaulichen Vorstellung ein wenig mehr entgegenzukommen, weiterhin ist es möglich, die Anordnung der reellen Zahlen auf die so erweiterte Zahlenmenge zu übertragen, bringt jedoch auch Schwierigkeiten mit sich: zum einen ist die Definition der Umgebungen der zusätzlichen Punkte nicht unmittelbar einleuchtend, zum anderen ist es kaum möglich, die Einführung der unendlich fernen Punkte - die zudem notwendigerweise in graphischen Veranschaulichungen nur sehr schwer wiederzugeben sind - entsprechend zu motivieren. Aus diesen Gründen erscheint die "Alexandroff-Kompaktifizierung" besser geeignet. Denn der Verlust der Ordnungsrelation in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fällt für die in diesem Kurs zu behandelnden Fragen nicht ins Gewicht.

In § 1 wurde bereits die Darstellung der reellen Zahlen durch die Menge aller Punkte - bis auf einen - auf einem Kreis besprochen:



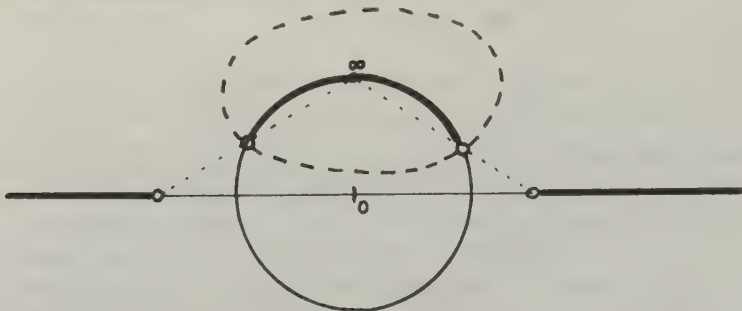
Es liegt nahe, $\mathbb{R}$ durch diesen einen Punkt zu "vervollständigen". Man nennt ihn - die Konstruktion der Kreisdarstellung macht es verständlich - den "unendlich fernen Punkt" ∞ .



Die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ erhält man auch in der Kreisdarstellung als Spurtopologie der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}^2$, wie man sich leicht überzeugt.

A113 Zeigen Sie, dass ein Intervall auf dem Zahlenkreis $\mathbb{R}$ als Schnitt einer offenen Kreisscheibe mit dem Zahlenkreis gedeutet werden kann.

Es ist ganz klar, wie man nun eine natürliche Topologie auf $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und dabei insbesondere eine Umgebung von ∞ zu definieren hat:



Die offenen Umgebungen von ∞ beschreibt man am besten durch ihre Komplemente:

U ist offene Umgebung von $\infty \iff$

- a) $\infty \in U$
- b) $\bar{\mathbb{R}} \setminus U$ ist abgeschlossen (in $\mathbb{R}$)
- c) $\bar{\mathbb{R}} \setminus U$ ist beschränkt

Abkürzend sagt man

(15.1) $A \subset \mathbb{R}$ heisst kompakt $\iff$
 A ist beschränkt und abgeschlossen

und kann nun $\bar{\mathbb{R}}$ mit einer natürlichen Topologie versehen:

(15.2) Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$:
 Auf $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist

$$\tilde{\tau}_n = \tau_n \cup \{U: \infty \in U \wedge \mathbb{R} \setminus U \text{ ist kompakt}\}$$
 eine Topologie.

Zum Verständnis von (15.2) sind noch Beispiele kompakter Mengen notwendig.

B56 Jedes abgeschlossene Intervall ist kompakt.

Zu zeigen ist nur die Beschränktheit von $[a, b]$:

Sei $x \in [a, b]$

1. Fall: $x \leq 0 \Rightarrow |x| \leq |a|$

2. Fall: $x \geq 0 \Rightarrow |x| \leq |b|$

Zusammen: $x \leq \max(|a|, |b|)$.

A114 Zeigen Sie, dass eine endliche Vereinigung kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ wieder kompakt ist, während eine unendliche Vereinigung kompakter Mengen weder beschränkt noch abgeschlossen sein muss.

Zwei einfache Überlegungen fehlen noch, um Satz (14.5) anwenden zu können:

(15.3) $\mathbb{R}$ ist ein Hausdorffraum.

Beweis: Ein topologisches Bild von $\mathbb{R}$ ist die Kreislinie (S^1) in $\mathbb{R}^2$, die als Teilraum von $\mathbb{R}^2$ ebenfalls hausdorffsch ist (Aufg. 6 S. 195).

(15.4) ∞ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: $\{\infty\}$ ist per definitionem keine offene Menge in $\mathbb{R}$.

Zusammen:

(15.5) Eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat in ∞ höchstens einen Grenzwert.

B57 $f(x) = x^2 + 2$. Es ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, denn jede Umgebung von ∞ enthält eine andere Umgebung der Form $U = \{\infty\} \cup \{x: |x| > r\}$ ($r \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{f}^1(U) &= \{\infty\} \cup \{x: |x^2+2| > r\} \\ &= \{\infty\} \cup \{x: x^2 > r-2\} \\ 1. \text{ Fall: } r &\leq 2 \Rightarrow \bar{f}^1(U) = \bar{\mathbb{R}} \in \mathcal{U}(\infty) \\ 2. \text{ Fall: } r &\geq 2 \Rightarrow \\ \bar{f}^1(U) &= \{\infty\} \cup \{x: |x| > \sqrt{r-2}\} \in \mathcal{U}(\infty) \end{aligned}$$

A115 Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x \leq -1 \\ x & \text{für } -1 < x < 1 \end{cases}$$

in ∞ stetig ergänzbar?

A116 Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktion

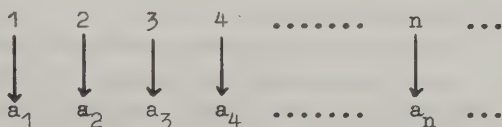
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ in } 0 \text{ und } \infty. \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bemerkung: Durch die Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ mit Hilfe nur eines Punktes ∞ entsteht nun - etwa in A116 - die Situation, dass die Stetigkeit von Funktionen von der gewöhnlichen anschaulichen Vorstellung abweichen kann. Dies ist jedoch eher als Vorteil aufzufassen, zumal erfahrungsgemäss keine Verständnisschwierigkeiten auftauchen.

Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt sind - wenn man sie für notwendig hält - sehr leicht zusammenzustellen. Alle in $\mathbb{R}$ - oder einer dichten Teilmenge - stetigen Funktionen können untersucht werden.

§ 16 Grenzwerte von Folgen

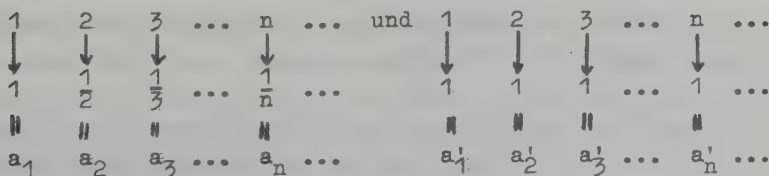
Zahlenfolgen werden in der Schule häufig nicht exakt definiert. Man begnügt sich vielmehr mit Umschreibungen (etwa durch die Identifikation von Folgen mit "angeordneten Reihen von Zahlen"). Solche oder ähnliche Formulierungen sind sicher nicht befriedigend, da sie nicht mit eindeutig definierten Begriffen operieren, sondern nur eine verschwommene Vorstellung unzureichend artikulieren. Eine exakte Definition wird durch die Numerierung der Folgenglieder nahegelegt:



(16.1) Eine Folge in einer Menge X ist eine Abbildung $\alpha: \mathbb{N} \longrightarrow X$.

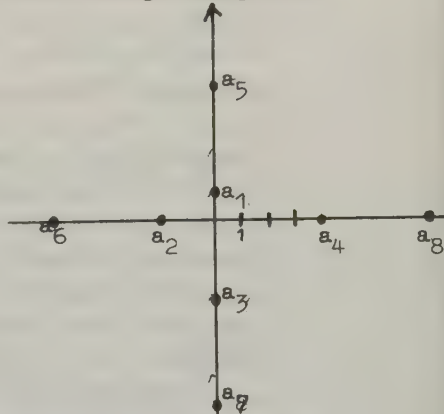
Schreibweise: Das n -te Folgenglied $\alpha(n)$ einer Folge bezeichnet man abkürzend mit a_n . Will man andeuten, dass die Folge die Glieder a_n ($n \in \mathbb{N}$) besitzt, so schreibt man auch $(a_n) := \alpha$.

Es sei darauf hingewiesen, dass die zur Definition führende Darstellung einer Folge den (falschen) Eindruck erwecken kann, bei Folgen müsse es sich um injektive Abbildungen handeln. Sie sollte daher durch spezielle Folgen vorbereitet werden, die sowohl injektiv als auch nicht injektiv sein sollen, z.B.



Die Definition (16.1) beschränkt sich nicht auf Zahlenfolgen. Das sollte man durch einige Beispiele unterstreichen:

- B58** Eine Folge von Zahlenpaaren, deren Glieder als Punkte in der Ebene dargestellt werden können, wird etwa durch
- $$a_n = (n \cdot \cos \frac{n\pi}{2}, n \cdot \sin \frac{n\pi}{2})$$
- beschrieben.



- B59** $X = \{u, v, w\}$.
Bildet man alle geraden natürlichen Zahlen auf u , alle ungeraden nat. Zahlen auf v ab, so erhält man in X die Folge $v, u, v, u, v, u, \dots$

- B60** D sei eine Deckdrehung eines regelmäßigen n -Eckes.
 $a_k := D^k$ beschreibt eine Folge in der Menge der Deckdrehungen. Die übereinstimmenden Folgenglieder liefern gerade die Restklassen (modulo n).

Grenzwerte von Folgen können für stetige Folgen definiert werden (s. Def. 14.1).

Voraussetzung für die Beurteilung der Stetigkeit einer Abbildung ist die Vorgabe von Topologien auf Definitions- und Zielmenge:

Wir betrachten nur noch Folgen in topologischen Räumen und versehen $\mathbb{N}$ mit einer geeigneten Topologie.

Die bereits gewonnenen Erkenntnisse über Grenzwerte reellwertiger Abbildungen können verwendet werden, wenn man $\mathbb{N}$ mit der Spurtopologie zu der natürlichen Topologie τ_n (auf $\mathbb{R}$) versieht.

Die Spurtopologie ist die diskrete Topologie auf $\mathbb{N}$:



Eine Folge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ wird daher aufgefasst als Abbildung

$$\alpha : (\mathbb{N}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

Man stellt fest:

Jede Folge ist stetig !!!!!

(das Urbild einer offenen Menge $A \subset X$ ist als Teilmenge von $\mathbb{N}$ notwendig offen)

und weiter

- jeder Punkt von $\mathbb{N}$ liegt bezüglich $\mathbb{N}$ isoliert ja sogar
- jeder Punkt von $\mathbb{R}$ liegt bezüglich $\mathbb{N}$ isoliert
- ∞ ist der einzige Häufungspunkt von $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{R}}$

(denn das Komplement jeder Umgebung von ∞ ist beschränkt, enthält also höchstens endlich viele natürliche Zahlen).

Die Untersuchung einer Folge auf Grenzwerte scheint also höchstens im Punkt ∞ sinnvoll zu sein. Das erklärt die folgende Definition:

(16.2) Eine Folge α hat den Grenzwert a , wenn α in ∞ durch a stetig ergänzt werden kann.

Diese vereinfachte Sprechweise macht also einen Grenzwert an der einzig interessanten Stelle zu "dem" Grenzwert einer Folge. Damit wird jedoch nicht präjudiziert, dass eine Folge nur einen Grenzwert haben kann. Dies wird durch Beispiele zu belegen sein.

Vor der Behandlung von Beispielen wird man noch Satz (14.6) auf Folgen übertragen. Die Voraussetzungen dafür sind alle gegeben, denn

- a) Jede Folge ist stetig und
b) ∞ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{N}$.

(16.3) Eine Folge in einem Hausdorffraum hat höchstens einen Grenzwert.

B61 In $X = \{u, v, w\}$ wird die alternierende Folge α mit $a_n = \begin{cases} u & \text{für } n \text{ gerade} \\ v & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ auf Grenzwerte untersucht.

- a) X sei mit der diskreten Topologie $\mathcal{T}_d$ versehen.

Behauptung: α besitzt keinen Grenzwert in X .
Man beweist das indirekt.

Angenommen, v sei Grenzwert von α . Dann müsste die "ergänzte" Abbildung $\underline{\alpha}$ mit

$$\underline{\alpha}(x) = \begin{cases} v & \text{für } x = \infty \\ a_n & \text{für } x = n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

stetig sein.

Nun ist aber $\{v\}$ Umgebung von v , während

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^{-1}(\{v\}) &= \{n: a_n = v\} \cup \{\infty\} \\ &= \{n: n \text{ ungerade}\} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

keine Umgebung von ∞ ist: $\underline{\alpha}$ ist in ∞ nicht stetig.

Die Annahme war falsch.

Völlig analog behandelt man die beiden anderen Möglichkeiten.

- b) X sei mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{u, v\}, X\}$ versehen.

In diesem Fall sind alle Elemente von X Grenzwerte von α :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(u) &= \mathcal{U}(v) = \{\{u, v\}, X\} \\ \mathcal{U}(w) &= \{X\}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass das Urbild jeder Umgebung eines Elementes aus X (bei der jeweiligen Ergänzung $\underline{\alpha}$) gerade $\mathbb{N}$ und damit Umgebung von ∞ ist.

A117 Gibt es eine Topologie auf $X = \{u, v, w\}$ so, dass die Folge α aus B61 genau einen Grenzwert in X besitzt?

Das Beispiel zeigt, dass die Formulierung (16.2) des Grenzwertes von Folgen für konkrete Berechnungen nicht sehr geeignet ist, da schon ein relativ leicht überschaubares Beispiel Schwierigkeiten bei der Durchführung macht. Für Folgen in einem unendlichen Raum (z.B. Zahlenfolgen) wird man deshalb eine modifizierte Formulierung suchen müssen. Einige einfache Umformungen ergeben die übliche Definition des Grenzwertes:

$$\begin{aligned}
 & a \text{ ist Grenzwert von } \alpha = (a_n) \\
 \Leftrightarrow & \quad \underline{\alpha}(x) = \begin{cases} a & \text{für } x = \infty \\ a_n & \text{für } x = n \end{cases} \quad \text{ist stetig (in } \infty) \\
 \Leftrightarrow & \quad \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(a)} \alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U}(\infty) \\
 \Leftrightarrow & \quad \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(a)} \{n: a_n \in U\} \cup \{\infty\} \in \mathcal{U}(\infty) \\
 \Leftrightarrow & \quad \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(a)} \{n: a_n \notin U\} \quad \text{ist endlich}
 \end{aligned}$$

d.h. in jeder Umgebung von a liegen "fast alle" - besser: von einer endlichen Stelle ab alle - Folgenglieder. Akzeptiert man den Terminus "fast alle" in der Bedeutung von "alle bis auf endlich viele", so ist in diesem Falle die verbale Formulierung der Formelsprache vorzuziehen:

(16.4) a ist Grenzwert der Folge α , wenn in jeder Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.



In metrischen Räumen muss man bekanntlich nur die offenen Kugeln um einen vermuteten Grenzwert a untersuchen (sie bilden eine Umgebungsbasis von a). Da in metrischen (Hausdorff-) Räumen ausserdem die Eindeutigkeit des Grenzwertes gesichert ist, gilt

$$a = \lim a_n \iff \bigwedge_{r>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq n_0} a_k \in K(a, r)$$

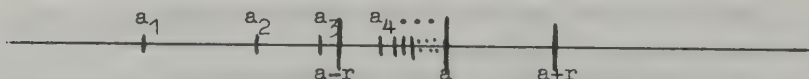
oder

$(X, d) \text{ metr. Raum, } (a_n) \text{ Folge in } X, a \in X$	
(16.5)	$a = \lim a_n$ $\iff \bigwedge_{r>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq n_0} d(a, a_k) < r$

Spezialisiert auf $\mathbb{R}$:

$$a = \lim a_n \iff \bigwedge_{r>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq n_0} |a - a_k| < r$$

Das kann anschaulich nur sehr unzureichend dargestellt werden:



B62 $a_k = \frac{k+1}{k}$ beschreibt eine Folge im metrischen Raum $\mathbb{R}$.

Behauptung: $\lim a_n = 1$

Sei $r > 0$ gegeben.

Man setzt $n_0 > \frac{1}{r}$ (eine solche nat. Zahl gibt es immer)

Ist $k \geq n_0$, so hat man $k > \frac{1}{r}$, also $\frac{1}{k} < r$

$$\implies d(a_k, 1) = \left| \frac{k+1}{k} - 1 \right| = \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k} < r$$

q.e.d.

- A118 Berechnen Sie den Grenzwert (in $\mathbb{R}$) der Folge α mit $a_n = \frac{3n-4}{5n+6}$.

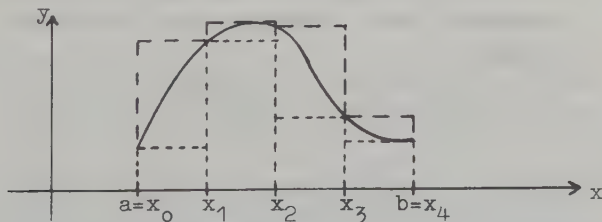
Da es wiederum nicht Aufgabe dieses Topologiekurses sein kann, nun die Berechnung von Grenzwerten zu üben, sei auf weitere Beispiele verzichtet. In einem Fall soll jedoch noch einmal darauf hingewiesen werden, wie sehr die Konvergenz einer Folge von der vorgegebenen Topologie abhängt.

- A119 Bestimmen Sie zu der Folge α mit $a_n = n$ in den angegebenen topologischen Räumen jeweils sämtliche Grenzwerte.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(\mathbb{N}, \tau_d)$ | b) $(\mathbb{N}, \tau_t)$ | c) $(\mathbb{N}, \tau_c)$ |
| d) $(\mathbb{N}, \tau_n)$ | e) $(\overline{\mathbb{N}}, \tau_t)$ | f) $(\overline{\mathbb{N}}, \tau_c)$ |
| g) $(\mathbb{R}, \tau_n)$ | h) $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_n)$ | i) $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_c)$ |

Als Spezialfall des Grenzwertes von Folgen betrachten wir noch das Riemannsche Integral¹⁾:

- B53 Gegeben sei eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die zugehörige Fläche "unter der Kurve" kann man folgendermassen näherungsweise berechnen: Man teilt das Intervall $[a, b]$ in k gleich grosse Intervalle ein²⁾:



¹⁾ Das Integral soll an dieser Stelle nur erwähnt und nicht ausführlich diskutiert werden.
²⁾ Beliebige Zerlegungen, die eigentlich diskutiert werden müssten, führen nicht so unmittelbar auf Zahlenfolgen. Bei beschränkten und integrierbaren Funktionen muss man jedoch nur äquidistante Einteilungen betrachten.

und setzt für $0 \leq i \leq k-1$

$$m_i = \inf_{\substack{x \in [x_i, x_{i+1}]}} f(x) \quad \text{und} \quad M_i = \sup_{\substack{x \in [x_i, x_{i+1}]}} f(x)$$

$$s_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad \text{heisst } k\text{-te Unter=}$$

summe,

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad k\text{-te Obersumme.}$$

(s_n) und (S_n) sind Folgen von reellen Zahlen.

Existieren $\lim s_n$ und $\lim S_n$ ²⁾ und ist

$$\lim s_n = \lim S_n = s,$$

so nennt man

$$\int_a^b f(x) dx := s$$

das bestimmte Integral über die Funktion f (in den Grenzen a und b)

¹⁾ Bei stetigen Funktionen kann man Minima und Maxima betrachten. Das wird aber erst in (17.12) gezeigt.

²⁾ Für monotone bzw. stetige Funktionen existiert dieser Grenzwert immer. Das soll hier aber nicht verifiziert werden.

Aufgaben

- 1) Suchen Sie das Bildungsgesetz der Folge

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{10}{7}, \frac{15}{11}, \dots$$

Geben Sie a_k in einem geschlossenen Ausdruck an und berechnen Sie $\lim a_n$.

- 2) f sei eine stetige Abbildung in $\mathbb{R}$.
 $a_k := f(k)$ beschreibt dann eine Folge in $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, so existiert auch $\lim a_n$ und es gilt:

$$\lim a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Ist auch die Umkehrung richtig?

- 3) " $U \subset \mathbb{N}$ ist Umgebung von ∞ , wenn U den Punkt ∞ und zu jeder natürlichen Zahl n mindestens eine grössere enthält".

Ist diese Behauptung richtig?

Auf weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung von Grenzwerten wird aus den oben angegebenen Gründen verzichtet.

§ 17 Kompakte Räume

Bei der Untersuchung von Folgen im Hinblick auf ihr Grenzwertverhalten stellen sich mit Sicherheit immer wieder dieselben Fragen:

- 1) Woher weiss man, dass die vorgegebene Folge einen Grenzwert hat?
- 2) Wie ermittelt man einen solchen Grenzwert?
- 3) Ist der errechnete Grenzwert der einzige?

Frage 3 ist durch die bisherigen Untersuchungen bereits erledigt: die Eindeutigkeit der Grenzwerte hängt sicher in erster Linie von den Eigenschaften des topologischen Raumes ab, aus dem die Folgenglieder stammen. Durch die Definition des Hausdorffraumes hat man eine optimale Lösung gefunden.

Zur Klärung von Frage 2 vermögen die behandelten Grundlagen der Topologie ausser der Definition des Grenzwertes nur wenig beizutragen. Hier ist die konkrete Gestalt der Folge ausschlaggebend. Frage 1 hingegen wird sich möglicherweise zumindest teilweise wieder durch eine Untersuchung der Eigenschaften des gegebenen topologischen Raumes beantworten lassen. Freilich wird auch hier keine für alle Folgen gleichermassen gültige Aussage möglich sein.

Die kompakten Räume bilden auch von der Komplexität der Überlegungen her einen würdigen Abschluss des Kurses. Sie werden gleichzeitig zwei fundamental wichtige Aussagen der Analysis ermöglichen. Man sollte sich deshalb - wenn möglich - nicht mit dem bisher Erreichten zufrieden geben.

Man wird zunächst versuchen, Eigenschaften für topologische Räume zu finden, in denen jede Folge genau einen Grenzwert hat. Dies werden also Hausdorffräume (Eindeutigkeit des Grenzwertes) mit zusätzlichen Eigenschaften sein.

Man sieht rasch, dass man auf diesem Wege nicht weiterkommt:

$(X, \mathfrak{F})$ sei ein Hausdorffraum, $a, b \in X$ ($a \neq b$).

Dann ist

$a, b, a, b, a, b, \dots$

eine Folge in X , die sicher keinen Grenzwert besitzt. Also:

(17.1) Ein Hausdorffraum, in dem jede Folge einen Grenzwert besitzt, hat höchstens ein Element.

Damit sind also gerade die konstanten Folgen erfasst, die jedoch aufgrund ihrer einfachen Gestalt ohnehin nicht sehr interessant sind.

Trotzdem waren die bisherigen Bemühungen nicht umsonst. Bleiben wir nämlich noch einen Augenblick bei der oben angegebenen Folge.

Offensichtlich gilt nicht, dass in jeder Umgebung von b (oder a) von einer endlichen Stelle ab alle Folgenglieder liegen. Eine etwas schwächere Bedingung ist jedoch erfüllt:

In jeder Umgebung von a (bzw. b) liegen "unendlich viele" Folgenglieder (die Folge "häuft" sich in jeder Umgebung von a). Die Folge hat die beiden Häufungspunkte a und b .

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum, (a_n) Folge in X , $a \in X$

(17.2) a heisst Häufungspunkt von (a_n) , wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Auch hier ist die ausführliche Formulierung der Abkürzung durch Quantoren vorzuziehen. Die Übereinstimmung beider Darstellungen ist jedoch leicht zu zeigen:

$$a \text{ ist Häufungspunkt der Folge } (a_n) \iff \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(a)} \bigwedge_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigvee_{k \geq n_0} a_k \in U$$

B64 In $\mathbb{R}$ hat die Folge (a_n) mit $a_k = k$ keinen Häufungspunkt:



Zu $a \in \mathbb{R}$ ist $U =]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ eine Umgebung, die höchstens ein Folgenglied enthält.

In $\bar{\mathbb{R}}$ hingegen bekommt (a_n) einen Häufungspunkt:
 ∞ !

Ausserhalb einer beliebigen Umgebung von ∞ liegen höchstens endlich viele natürliche Zahlen (= Folgenglieder).

In $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_c)$ schliesslich hat dieselbe Folge unendlich viele Häufungspunkte (und Grenzwerte):

Jede Umgebung einer beliebigen natürlichen Zahl n enthält bis auf höchstens endlich viele alle Folgenglieder.

A120 Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_k = \frac{1}{k}$ in $\mathbb{R}$ genau einen Häufungspunkt ($x_0 = 0$) besitzt.

Die eben behandelten Beispiele und die getroffene Wahl der Begriffe provozieren - im Falle, dass die Häufungspunkte von Mengen behandelt wurden¹⁾ - ein Missverständnis. Man vermutet

a ist Häufungspunkt der Folge (a_n)

$\Leftrightarrow$

a ist Häufungspunkt der Menge $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ aller Folgenglieder.

Man muss eine Klärung herbeiführen.

- A121** a) $(X, \mathcal{T})$ sei ein Hausdorffraum, (a_n) mit $a_k = b$ eine konstante Folge in X .
Suchen Sie alle Häufungspunkte der Folge (a_n) und der Menge A .
- b) Es sei $X = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$.
Gegeben ist die Folge (a_n) mit
- $$a_k = \begin{cases} b & \text{für } k = 1 \\ c & \text{sonst} \end{cases}$$
- Untersuchen Sie (a_n) und A auf Häufungspunkte.
- c) Weisen Sie nach, dass bei einer Folge (a_n) in einem metrischen Raum jeder Häufungspunkt der Menge A auch Häufungspunkt der Folge ist.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen ist also recht lose. Man kann zwar aus einer Variation dieses Gedankenganges die Definition des kompakten Raumes begründen; da hier aber eine elegantere Lösung vorgeschlagen wird, soll er nicht weiter verfolgt werden. Zunächst beweist man eine andere naheliegende Vermutung:

¹⁾ was nicht unbedingt notwendig ist - s. S. 200

(17.3) a Grenzwert von (a_n) $\Rightarrow a$ Häufungspunkt von (a_n)

Der Beweis ist sehr einfach:

a Grenzwert von (a_n) und $U \in \mathcal{U}(a)$

$\Rightarrow$ In $X \setminus U$ liegen höchstens endlich viele Folgenglieder

$\Rightarrow$ In U liegen unendlich viele Folgenglieder

$\Rightarrow a$ ist Häufungspunkt von (a_n) .

A122 (X, τ) sei ein Hausdorffraum und (a_n) eine Folge in X .

a) Zeigen Sie: Ist (a_n) konvergent, so besitzt (a_n) genau einen Häufungspunkt.

b) Ist die Umkehrung dieser Aussage richtig?

Die Definition eines topologischen Raumes, in dem jede Folge einen Häufungspunkt besitzt, bekommt man wieder - wie schon beim Hausdorffraum - durch einen indirekten Schluss.

Annahme:

(X, τ) ist ein top. Raum, in dem es eine Folge (a_n) ohne Häufungspunkte gibt

$\Rightarrow \bigwedge_{x \in X} x$ ist nicht Häufungspunkt von (a_n)

$\Rightarrow \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{U \in \mathcal{U}(x)} U$ enthält nur endlich viele Folgenglieder

$\Rightarrow \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{V_x \in \tau_x} x \in V_x \wedge V_x$ enthält nur endlich viele Folgenglieder

denn $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \bigvee_{V_x \in \tau_x} x \in V_x \subset U$

Sicher ist $X = \bigcup_{x \in X} V_x$

$\Rightarrow \mathcal{O} = \{V_x : x \in X\}$ ist eine "offene Überdeckung" von X .

Eine endliche Teilmenge von $\mathcal{O}$ überdeckt X sicher nicht, denn jede Menge V_x enthält höchstens endlich viele Folgenglieder.

Also: Es gibt eine offene Überdeckung von X , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Umkehrschluss: Enthält jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung, so besitzt jede Folge in X wenigstens einen Häufungspunkt.

Man definiert:

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$

(17.4) a) $\mathcal{O}$ heisst offene Überdeckung von X

$$\Leftrightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{O}} A = X$$

b) X heisst kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Damit weiss man:

(17.5) Eine Folge in einem kompakten Raum besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Die Definition des kompakten Raumes ist nun freilich so unanschaulich, dass vorerst noch nicht viel gewonnen ist. Die bisherigen Ergebnisse sind nur dadurch mit Inhalt zu füllen, dass man Beispiele für kompakte Räume angibt.

B65 Jeder endliche topologische Raum ist kompakt.

Es gibt ja nur endlich viele offene Mengen in X , sodass jede offene Überdeckung ohnehin endlich sein muss.

B66 $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt:



$O = \{]z - \frac{3}{4}, z + \frac{3}{4}[: z \in \mathbb{Z} \}$ ist eine offene Überdeckung, von der man keine Menge weglassen kann.

Man kann auch eine Folge ohne Häufungspunkt angeben: s. B64!

A123 Zeigen Sie, dass

- a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_c)$ kompakt ist
- b) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_d)$ nicht kompakt ist.

Überprüfen Sie die Auswirkung dieser Tatsache auf die Folge $a_k = 2k+1$.

Bemerkung: Häufig¹⁾ wird zusätzlich gefordert, dass ein kompakter Raum hausdorffsch sein soll. $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_c)$ wird dann nur quasikompakt genannt. Durch eine derartige Unterscheidung in diesem Lehrgang würde man jedoch vermutlich nur unnötige Komplikationen verursachen, die durch kein sachliches Ergebnis zu rechtfertigen sind. Gerade aus Gründen der Verdeutlichung des Inhalts der Definition kompakter Räume wäre es be-
dauerlich, wenn man die co-endliche Topo-

¹⁾ s. Litverz. (3) S. 83 ,

logie ausklammern müsste.

Für die kompakten Räume gibt es nur wenige triviale Beispiele. In (15.1) haben wir zwar die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ als kompakt bezeichnet, der Nachweis der Übereinstimmung mit (17.4) steht jedoch noch aus.

(17.6) Satz von Heine-Borel¹⁾

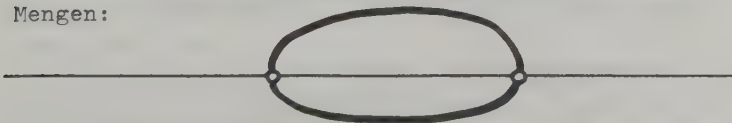
Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$
ist kompakt.

Der Beweis ist ganz sicher zu schwierig, um als Ganzes von den Schülern erarbeitet zu werden. Löst man ihn aber in der unten angegebenen Weise in Einzelschritte auf, so ergeben sich sicher Möglichkeiten zu selbständiger Erarbeitung.

Wesentliche Hilfe beim Beweis leistet Pollux²⁾:



Er veranschaulicht eine Überdeckung durch offene Mengen:



und spezialisiert gleich in nützlicher Weise auf eine Überdeckung durch offene Intervalle. Dies ist zulässig, weil jede offene Menge als Vereinigung offener Intervalle dargestellt werden kann. Man hat also

¹⁾ Der Satz wird üblicherweise etwas allgemeiner formuliert: s. etwa (12) S. 59

²⁾ Das Fabeltier stammt - wie grosse Teile des Beweises - aus (28) S. 245

mit jeder offenen Überdeckung auch eine Überdeckung durch offene Intervalle vorliegen.

Man gibt vor:

- a) $\mathcal{O}$ sei eine offene Überdeckung von $[a, b]$ und $\mathcal{J}$ die zugehörige Überdeckung durch offene Intervalle.
- b) $P := \{x: [a, x] \text{ lässt sich durch eine endliche Teilmenge von } \mathcal{J} \text{ überdecken}\}$

und zeigt der Reihe nach, wobei einigemale Pollux das Argumentieren übernimmt:

- 1) $a \in P$



- 2) Es gibt $c \in P$ mit $a < c$

- 3) P ist ein Intervall, d.h. P enthält mit jedem Element v auch alle x zwischen a und v .

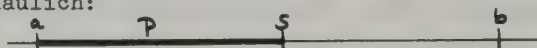
Bis jetzt erklärt Pollux alles.

- 4) P ist nach oben beschränkt (durch b)

- 5) P enthält sein Supremum s .

s ist die kleinste reelle Zahl mit $x \in P \Rightarrow x \leq s$

Anschaulich:



Mit 1) und 2) weiss man: $a < s$.

Pollux:



s liegt in einem Intervall I

I enthält mit s auch eine Zahl t mit $a \leq t < s$

$$\Rightarrow t \in P$$

$\Rightarrow [a, t]$ lässt sich von endlich vielen Intervallen aus $\mathcal{J}$ überdecken.

Pollux zeigt: $[a, s]$ hat dieselbe Eigenschaft, also

$$s \in P!$$

- 6) $s = b$

Wieder hilft Pollux (s. Skizze unter 5):

Nimmt man an, es sei $s < b$, so wird mit $[a, s]$ auch $[a, u]$ (mit $s < u$, s. Skizze) von endlich vielen Intervallen aus $\mathcal{J}$ überdeckt

$\Rightarrow s \neq \sup P$ Widerspruch.

Insgesamt: $P = [a, b]$.

- 7) Aus der nun nachgewiesenen endlichen Teilüberdeckung von $\mathcal{J}$ erhält man eine solche von $\mathcal{O}$, indem man anstelle jedes offenen Intervalles eine offene Menge aus $\mathcal{O}$ nimmt, die das Intervall enthält:

$[a, b]$ ist kompakt.

Fast analog kann man diese Aussage auch auf abgeschlossene Rechtecke in $\mathbb{R}^2$ (und durch vollständige Induktion auf abgeschlossene Quader in $\mathbb{R}^n$) übertragen. Dies soll hier nur andeutungsweise durchgeführt werden:

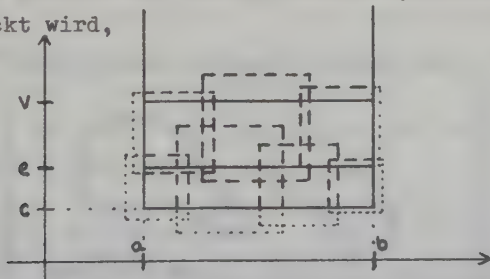
(17.7) Jedes abgeschlossene Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ ist kompakt.

Beweisandeutung: $\mathcal{O}$ sei eine offene Überdeckung.

Die zugehörige Überdeckung durch offene Quadrate soll $\mathcal{Q}$ heißen.

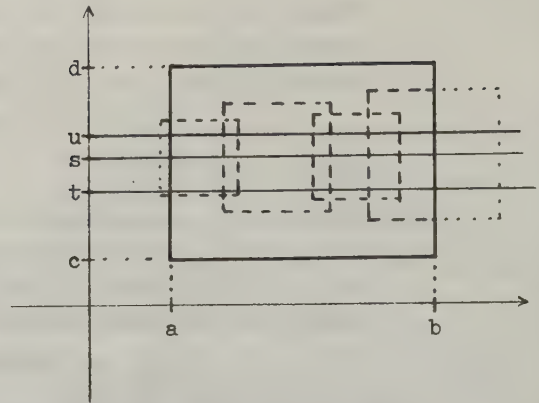
Man wählt $P := \{x: [a, b] \times [c, x] \text{ wird von einer endlichen Teilmenge von } \mathcal{Q} \text{ überdeckt}\}$

Da mit $[a, b]$ auch jede "Strecke" $[a, b] \times \{y\}$ kompakt ist und deshalb von endlich vielen Quadraten aus überdeckt wird,



kann man den Beweis von (17.6) fast wörtlich übertragen (man muss nur Pollux "verbreitern"). Die Beweisteile 1) - 4) verlaufen dann ganz analog wie in (17.6) und auch die Teile 5) und 6) machen keine Schwierigkeiten:

Man findet t und u wie in (17.6):



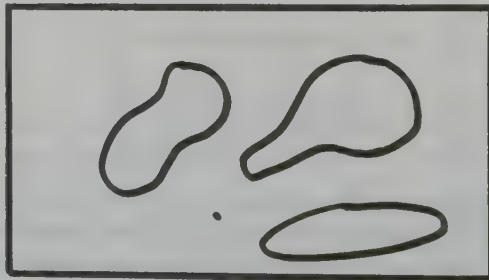
Man hat damit zumindest einen Hinweis darauf, dass (15.1) nicht nur zulässig war, sondern auch noch verallgemeinert werden kann:

(17.8) $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\iff$
 K ist beschränkt und abgeschlossen

Der nicht einfache Beweis wird in drei Teile zerlegt, von denen jeder für sich von Bedeutung ist:

- a) Jede abgeschlossene Teilmenge eines (kompakten) abgeschlossenen Quaders ist kompakt.
- b) Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt.
- c) Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

Anschaulich:



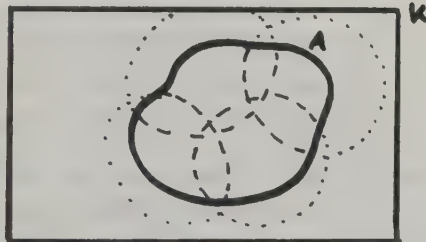
Die einzelnen Schritte des Beweises lassen sich teilweise auf noch allgemeinerer Ebene durchführen (und dadurch vereinfachen!!)

- (17.9) a) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.
- b) Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt.
- c) Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.

Beweis:

- a) K sei kompakt und $A \subset K$ sei abgeschlossen,

$\mathcal{O}$ sei eine offene Überdeckung von A .
Man konstruiert daraus eine offene Überdeckung von K :



Ist B offen in A (bei der Spurtopologie),
so ist $B = A \cap B'$ (B' offen in K).

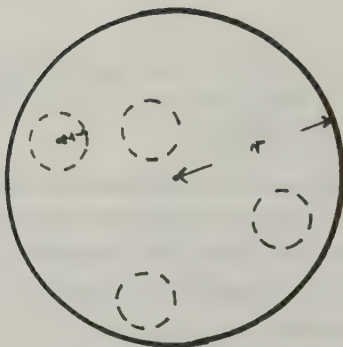
$\mathcal{P} = \{B' : B \in \mathcal{O}\} \cup \{K \setminus A\}$ ist eine offene Überdeckung von K mit einer endlichen Teilüberdeckung $\mathcal{P}'$ (nach Voraussetzung).

$\Rightarrow \mathcal{O}' = \{B : B' \in \mathcal{P}'\}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{O}$.

- b) $C \subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt.

$\mathcal{O} = \{K(p, 1) : p \in C\}$ ist eine offene Überdeckung von C mit einer endlichen Teilüberdeckung.

C lässt sich also von endlich vielen Einheitskugeln überdecken: C ist beschränkt (s. Skizze S. 234).



c) $(X, \mathcal{T})$ sei ein Hausdorffraum, $C \subset X$ kompakt.

Behauptung: C ist abgeschlossen

d.h. $X \setminus C$ ist offen

Sei $x \notin C$.

Man konstruiert eine zu C disjunkte (in $X \setminus C$ enthaltene) Umgebung von x auf die folgende Weise:

Zu jedem $y \in C$ gibt es $U_y \in \mathcal{U}(x)$, $V_y \in \mathcal{U}(y)$

mit $U_y \cap V_y = \emptyset$ (denn $x \neq y$)

Die V_y kann man ohne weiteres offen wählen und hat damit eine offene Überdeckung von C :

$$\mathcal{O} = \{V_y : y \in C\}$$

$\mathcal{O}' = \{V_1, \dots, V_n\}$ sei eine endliche Teilüberdeckung (C ist ja kompakt)

Dann ist $U := U_1 \cap \dots \cap U_n$ eine Umgebung von x , die zu C disjunkt ist:

Man hat $U \cap V_i = \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$

und - weil die V_i C überdecken - auch

$$U \cap C = \emptyset$$

Damit ist der Beweis geschlossen.

Es bedarf keiner Erwähnung, dass Teil c) nicht von den Schülern selbständig durchgeführt werden kann - zumindest nicht ohne erheblichen Zeitaufwand.

Eine einfache Folgerung ist

(17.10) Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Denn sie kann als Folge in einem kompakten Quader aufgefasst werden.

A124 In $\mathbb{R}^n$ hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert dieser Teilfolge ist ein Häufungspunkt der Folge.

Recht einfach zeigt man noch

(17.11) Jedes stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.

Beweis: K sei kompakt und $f: K \longrightarrow L$ stetig und surjektiv.

$$K \xrightarrow{f} L$$

offene Überdeckung $\longleftarrow$ Überdeckung $\mathcal{O}$
 $\mathcal{U} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{O}\}$

↓
 endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}'$ $\longrightarrow$ endliche Teilüberdeckung $\mathcal{O}' = \{A : f^{-1}(A) \in \mathcal{U}'\}$

Damit weiss man

B67 Jeder Bogen und jeder Weg in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Wichtig für die Analysis ist dagegen

(17.12) Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt in $[a, b]$ ihr Supremum und ihr Infimum an (die Menge ihrer Funktionswerte besitzt ein Maximum und ein Minimum).

Das benötigt man z.B. für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

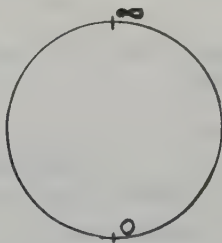
Der Beweis von (17.12) ist sehr einfach:

Das stetige Bild des kompakten Intervalles $[a, b]$ ist kompakt, also beschränkt und abgeschlossen.

Man kann jetzt auch recht einfach rechtfertigen, warum man in § 15 von einer "Kompaktifizierung" von $\mathbb{R}$ sprechen konnte:

B68 $\bar{\mathbb{R}}$ und $\bar{\mathbb{N}}$ sind kompakt.

Denn sie können als abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden:



Anmerkung: Um ganz exakt zu sein, müsste man zeigen, dass $\bar{\mathbb{R}}$ stetiges Bild des "Zahlenkreises" ist. Das ist aber dadurch, dass der Zahlenkreis als Modell für $\bar{\mathbb{R}}$ verwendet wird, für die Schüler so selbstverständlich, dass es kaum problematisiert werden kann. Andererseits wurde sogar schon zumindest anschaulich die topologische Äquivalenz der beiden Räume gezeigt (s. Def. der Topologie auf $\bar{\mathbb{R}}$ auf

S. 210 und A70 S. 152). Wenn gewünscht, können beide Überlegungen an dieser Stelle noch einmal zusammengefasst und wiederholt werden. Man sollte sich aber in jedem Fall mit anschaulicher Argumentation begnügen.

A125 Zeigen Sie unmittelbar mit der Definition 17.4, dass $\overline{\mathbb{I}\mathbb{N}}$ kompakt ist.

A126 Kompaktifizieren Sie - analog zu (15.2) - den nicht kompakten Raum $(\mathbb{R}^2, \tau_n)$ und deuten Sie $\overline{\mathbb{R}^2}$ als "Riemannsche Zahlenkugel".

Aufgaben

- 1) Geben Sie sämtliche Häufungspunkte der Folge (a_n) mit
$$a_k = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$
sowie eine konvergente Teilfolge an.
- 2) Ist $\mathbb{R}^2$ mit der Streifentopologie (B53) kompakt?
- 3) Ist die Menge $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{I}\mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ kompakt?
- 4) Zeigen Sie: Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt.

IV Einige methodische Hinweise

Eine Modernisierung des Mathematikunterrichts der Kollegstufe kann sich nicht damit begnügen, traditionelle Stoffe gegen neue - etwa die Topologie - auszutauschen. Mit zunehmendem Abstraktionsgrad und verstärkter logischer Strukturierung des Stoffes wird die für die "Aufgabendidaktik" häufig typische Methode, Rezepte für die Lösung von Aufgabenklassen frontal zu vermitteln und diese dann durch häufige Wiederholung "einzuschleifen", immer weniger effektiv. Auf der anderen Seite ist es auch unmöglich, die methodischen Prinzipien der Hochschulmathematik zu kopieren. Sie sind zweifellos auf mathematische Spitzenbegabungen zugeschnitten und setzen die Fähigkeit zu selbständiger Beschäftigung mit Mathematik voraus, die doch gerade im Mathematikunterricht der Kollegstufe erst gefördert werden soll. Mathematisierender Unterricht braucht also neben ausreichender Motivation durch die Auswahl und vor allem durch die Formulierung und didaktische Aufbereitung der Problemstellungen eine Unterrichtsorganisation, die dem Schüler Gelegenheit zu selbständiger, aktiver, aber zielgerichteter Arbeit gibt. Dabei kann wiederum eine spezielle Arbeitsform nicht durchgehend optimal sein, da einerseits mathematische Probleme zu vielschichtig sind, als dass sie nach einem Schema erledigt werden könnten, und andererseits ein Wechsel zwischen verschiedenen Arbeitsformen vermutlich einen wertvollen Beitrag zur Motivation der Schüler leisten kann¹⁾. Im Folgenden werden einige mögliche Arbeitsangegeben und kurz im Hinblick auf ihre Eignung für

¹⁾ s. etwa (44) S. 119 - 127

den Unterricht in der Kollegstufe und speziell für den vorgeschlagenen Topologiekurs diskutiert. Anregungen zu ihrer Realisierung geben die beigegeführten exemplarischen Unterrichtseinheiten und Arbeitskarten.

IV.1 Bemerkungen zur Unterrichtsorganisation

- a) Eines der wichtigsten Hilfsmittel zum Vollzug mathematischer Denkprozesse ist die Diskussion der zu bearbeitenden Probleme. Für eine Diskussion, die nahezu jeden Schüler erfassen soll, ist der üblicherweise gegebene Klassenverband jedoch zu gross; er muss deshalb in verschiedene Diskussionsgruppen zu je etwa 4 - 5 Teilnehmern aufgelöst werden.

Selbstverständlich muss eine solche Diskussion jeweils gründlich vorbereitet und gegebenenfalls auch gesteuert werden. Hier bietet sich der Einsatz von Arbeitskarten¹⁾ an.

Wesentliches Merkmal der Arbeit in Diskussionsgruppen ist es jedenfalls, dass die Lösung der Probleme nicht vom Lehrer (und auch nicht durch das Schulbuch) vorgegeben wird. Dem Lehrer fällt demnach neben der schwierigen Aufgabe der Diskussionsvorbereitung nur noch die der Beratung und der Kontrolle der Ergebnisse zu. Möglicherweise ist es sogar besser, die Beratung von Arbeitsgruppen, die mit Schwierigkeiten zu kämpfen haben, durch andere Schüler vornehmen zu lassen.

¹⁾ Beispiele dazu in IV.3

b) Die Fähigkeit, mathematische Sachverhalte in für einen Gesprächspartner verständlicher Form darzustellen, ist die unerlässliche Voraussetzung für eine sinnvolle mathematische Diskussion. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll zu sein, die an Hochschulen weitverbreitete Organisationsform der Seminare partiell auf den Schulunterricht zu übertragen: Einige Schüler bereiten mit Hilfe des Lehrers (bzw. des Lehrerhandbuches) eine Unterrichtseinheit vor und erarbeiten sie mit der Klasse. Die dabei nötige intensive Beschäftigung mit einem begrenzten Stoffgebiet setzt für die vorbereitenden Schüler einen Fixpunkt fundierten Wissens, der möglicherweise ein tieferes Verständnis auch für andere Teile des Kurses ermöglicht. Ausserdem gibt diese Unterrichtsform einen Einblick in die Schwierigkeit der didaktischen Aufbereitung und Vermittlung von Wissen, was angesichts der Tatsache, dass ein beträchtlicher Teil der Abiturienten selbst Lehrer werden möchte, sicher nicht unwesentlich erscheint.

c) Eine Variante der Gruppenarbeit wäre eine Arbeitsform, die unter dem Schlagwort "Programmierter Unterricht" bekannt geworden ist. In unmodifizierter Form wird sie jedoch kaum über den Bereich der reinen Faktenvermittlung hinaus Bedeutung erlangen. Ein Wechselspiel und eine gegenseitige Durchdringung mit der Gruppendiskussion kann jedoch sehr fruchtbar werden:

Durch stufenweisen Übergang vom programmierten Unterricht her lässt sich die ungewohnte Diskussion mathematischer Probleme einführen und trainieren; die Diskussion wiederum lässt sich je nach der Art der zugrundeliegenden Arbeitsblätter straffen und intensivieren.

Programmierter Unterricht erscheint daher besonders zu Beginn des Kurses und an solchen Stellen,

an denen ein axiomatisches Vorgehen dem axiomatisierenden vorzuziehen ist (etwa aus Zeitgründen), geeignet.

- d) Bewusst an letzter Stelle unter den vorgeschlagenen Unterrichtsformen erscheint die traditionelle Lehrerdarbietung, ohne die man sicher auch in Zukunft nicht wird auskommen können. Es ist offensichtlich, dass die anderen vorgeschlagenen Arten der Unterrichtsorganisation vom Lehrer eine erhebliche Mehrbelastung vor allem ausserhalb des Stundendeputats verlangen, die er sicher nicht in ganzer Breite zu leisten vermag. Ausserdem ist von Zeit zu Zeit eine Zusammenfassung der diskutierten Probleme und der Ergebnisse notwendig. Auch für die Hinführung auf neue Begriffe sowie für die Vermittlung von Arbeitstechniken ist die Lehrerdarbietung wohl auch weiterhin von Nutzen.

Es sei darauf hingewiesen, dass die besprochenen Organisationsformen des Unterrichts keinesfalls alle Möglichkeiten ausschöpfen. Sie erlauben vielfache Variationen und Mischformen, die der jeweiligen Klassen- und Unterrichtssituation angepasst sein müssen. Die obigen Vorschläge sollen lediglich als Anregung dienen.

Es wurde schon erwähnt, dass es in der Regel eines gewissen Gewöhnungsprozesses bedarf, bis die Schüler mit den neuen Arbeitsformen zurechtkommen. Diese Schwierigkeiten sollte man jedoch in Kauf nehmen, zumal sie sich durchaus beheben lassen. Sie münden dann in einen für alle Seiten befriedigenden Mathematikunterricht.

IV.2 5 Unterrichtseinheiten

Die Schilderung des Lehrganges in III.3 kann trotz vieler didaktischer Hinweise natürlich nicht in voller Breite auf Details der Unterrichtssituation eingehen. Auch die Hinweise zur Unterrichtsorganisation in IV.1 zeigen nur sehr global einige Alternativen auf. Ein klareres Bild davon, wie die konkrete Realisierung eines in so vieler Hinsicht neuen Stoffes im Unterricht aussehen könnte, sollen die beigegeführten Unterrichtsskizzen geben. Ihre Auswahl unterstreicht ein Grundanliegen dieser Arbeit: den Nachweis der Möglichkeit, topologische Grundbegriffe in axiomatisierendem Vorgehen zu erschliessen, und des Nutzens dieser Methode. Daneben werden natürlich auch die anderen zugrundegelegten didaktischen Prinzipien (s. Teil II) berücksichtigt.

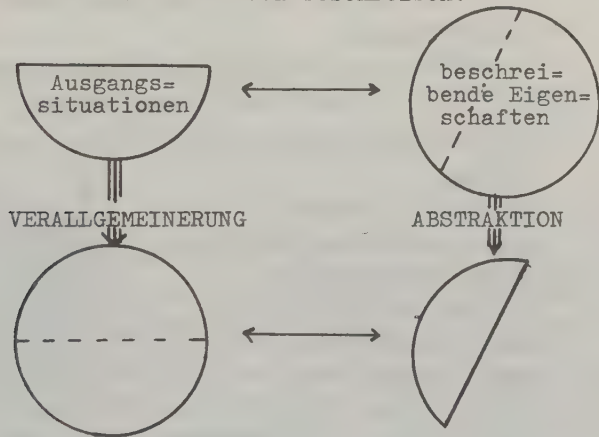
Im Einzelnen sind folgende Themenkreise vertreten:

- 1) Die Definition der offenen Mengen in metrischen Räumen (Verallgemeinerung durch Definition einer umfassenden Klasse von Mengen über eine spezielle Eigenschaft offener Kugeln) S. 243
- 2) Die Ableitung einer Formel für die abgeschlossene Hülle: $X \setminus \bar{A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$ S. 248
- 3) Bilder von Topologien (Analyse einer mathematischen Problemstellung) S. 251
- 4) Die Definition des zusammenhängenden Raumes und Verifikation eines Beispiels S. 258
- 5) Untersuchungen zur Eindeutigkeit von Grenzwerten (Lösung durch Definition des Häufungspunktes von Mengen und des Hausdorffraumes) S. 263

1) Die Definition der offenen Mengen in metrischen Räumen.
(zu § 1, S. 46)

- A) Lernziele: a) Kennenlernen und Analyse einer mathematischen Verallgemeinerung.
b) Nachträgliche Rechtfertigung einer vorhergehenden Abstraktion.

B) Erläuterung: Das Prinzip einer Verallgemeinerung lässt sich sehr einfach beschreiben:



Durch Abstraktion von einigen (für ein vorliegendes Problem unwesentlichen) der beschreibenden Eigenschaften der zu betrachtenden Situationen gewinnt man eine umfassende Klasse (für das Problem relevanter) Situationen. Diese größere Klasse von Beispielen ermöglicht nun - vielleicht - die Behandlung des vorliegenden Problems in einem geeigneteren Modell.

Mit dem Übergang von den offenen Kugeln zu den offenen Mengen liegt ein Beispiel einer solchen Verallgemeinerung vor. Leider fehlt zum gegenwärtigen Zeitpunkt ein Problem, das gerade diese Abstraktion notwendig macht. So ist es sehr

günstig, dass während der Durchführung ein Beispiel der nachträglichen Rechtfertigung einer früheren Abstraktion vorgestellt werden kann: das Instrumentarium der metrischen Räume erleichtert die Verifikation einer offenkundig erscheinenden Behauptung sehr wesentlich. Dadurch erscheint auch in diesem Fall der Hinweis auf späteren Gewinn akzeptabel.

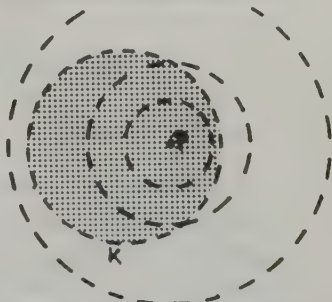
C) Vorkenntnisse: Definition der offenen und abgeschlossenen Kugeln mit Beispielen.

D) Durchführung:

1. Schritt: Hinweis auf eine topologische Eigenschaft der offenen Kugeln.

Es liegt eine Skizze einer offenen Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ vor.

Die Schüler tragen je einen beliebigen Punkt P in die Kreisscheibe ein und skizzieren offene Kreisscheiben um diesen Punkt:



Ist P nicht gerade der Mittelpunkt der vorgegebenen Kreisscheibe, so lassen sich die gezeichneten Kreisscheiben (Abkürzung: S_i) in 3 Klassen zerlegen:

$$S_i \subset K$$

$$K \subset S_i$$

$$K \cap S_i \neq S_i \wedge K \cap S_i \neq K$$

2. Schritt: Abheben von den abgeschlossenen Kugeln.

Die Schüler untersuchen analog eine abgeschlossene Kreisscheibe (Einzel- und Gruppenarbeit):

Geht man von einem inneren Punkt aus, so erhält man dieselbe Klasseneinteilung der Kugelumgebungen wie oben,

während für Randpunkte nur zwei Klassen auftreten (es gibt keine Scheiben S_i mit $S_i \subset K$).

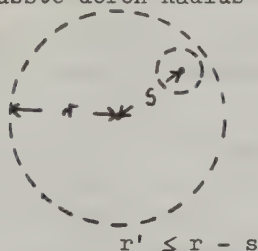
Bei abgeschlossenen Kreisscheiben ergibt sich also kein einheitliches Ergebnis.

3. Schritt: Exakter Nachweis.

Impuls: Die Ergebnisse wurden bisher nur der Anschauung entnommen. Die Punkte der offenen Kreisscheibe können aber beliebig dicht am Rand liegen! Gibt es tatsächlich immer eine kleine Kreisscheibe um einen solchen Punkt, die ganz innerhalb der grossen Kreisscheibe liegt?

Vermutung: ja.

Wie müsste deren Radius zu wählen sein?

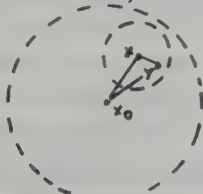


(Erarbeitung
gemeinsam mit
der Klasse)

Zu zeigen ist, dass diese Kreisscheibe wirklich ganz in der grossen enthalten ist: (Gruppenarbeit)

Die Beschränkung auf ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ wird vermutlich zu einem analytischen Ansatz verleiten, der ganz sicher scheitert.

Die Skizze hilft weiter (falls diese Idee nicht von alleine auftaucht, muss man sie geben):



In metrischen Räumen gilt die Dreiecksungleichung:

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y)$$

Der Rest ist leicht und kann von den Schülern (in Einzel- und Gruppenarbeit) durchgeführt werden.

Ergebnis:

Jede offene Kugel enthält mit jedem Punkt x auch eine (offene) Kugel um diesen Punkt x .

Dieses Ergebnis gilt selbstverständlich in allen metrischen Räumen (die Ableitung war völlig unabhängig von der speziellen Gestalt des Raumes).

4. Schritt: Vertiefung.

Aufgabe: Im metrischen Raum (M, d) aus B1 (S. 35) ist die offene Kugel $K(b, 3)$ zu bestimmen und auf das obige Ergebnis hin zu untersuchen.

Ergebnis: $K(b, 3) = \{a, b\}$
 $K(a, 1) = \{a\} \implies K(b, 3) \subset K(b, 3)$
und $K(a, 1) \subset K(b, 3)$

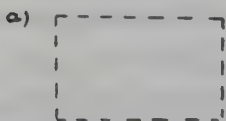
Eine Bestätigung für den obigen Satz.

Aufgabe: Zeichnen Sie in $\mathbb{R}$ die abgeschlossene Kugel $\overline{K(0, 1)}$. Enthält sie auch mit allen Punkten x auch eine Kugel um x ?

5. Schritt: Definition der offenen Mengen.

Behauptung: Eine Menge in einem metrischen Raum ist genau dann eine offene Kugel, wenn sie mit jedem Punkt auch eine offene Kugel um diesen Punkt enthält!
(d.h.: Man hätte die offenen Kugeln auch so definieren können)

Das provoziert Gegenbeispiele, etwa



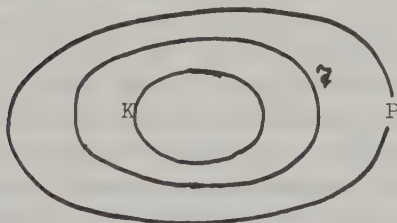
"Solche Mengen nennt man offen" (Lehrer)

Definition der offenen Mengen:

$$A \text{ heisst offen} \iff \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{r > 0} K(x, r) \subset A$$

(gemeinsam)

Aufgabe: Zeichnen Sie ein Mengendiagramm, das die Potenzmenge P eines metrischen Raumes X , die Menge K aller offenen Kugeln in X sowie die Menge aller offenen Mengen ($\mathcal{O}$) in X veranschaulicht:



Frage: Welche Eigenschaften haben offene Kugeln und offene Mengen gemeinsam?

Gibt es Eigenschaften der offenen Kugeln, die die offenen Mengen nicht unbedingt haben müssen?

Gibt es Eigenschaften der offenen Mengen, die die offenen Kugeln nicht unbedingt haben müssen?

2) Die Ableitung einer Formel für die abgeschlossene Hülle: $X \setminus \bar{A} = X \setminus^{\circ} A$ (zu § 5, S. 89)

- A) Lernziele: a) Mathematische Formulierung einer anschaulichen Vermutung
b) Übung mathematischer Diskussion
c) Selbständiges Auffinden eines einfachen Algorithmus und Konstruktion von Beispielen.

B) Erläuterung: Es liegt eine typische offene Aufgabenstellung mit mehreren nahezu gleichwertigen Lösungsmöglichkeiten vor. Das Ergebnis ist sehr leicht anschaulich zu vermuten, wenngleich eine geschlossene Formulierung einiger Impulse bedarf. Da ausserdem die verschiedenen Lösungen durchaus selbständig gefunden werden können, ist an dieser Stelle eine gute Gelegenheit zu unreglementierter Arbeit der Schüler gegeben.
Schliesslich lässt sich das Ergebnis recht einfach in einen Algorithmus für die Konstruktion abgeschlossener Hüllen übersetzen, für den es zahlreiche naheliegende Anwendungsbeispiele gibt.

- C) Vorkenntnisse: Grundlagen der Mengenalgebra (de Morgan), Definition von abgeschlossener Hülle und offenem Kern sowie deren Charakterisierung über Durchschnitt bzw. Vereinigung von Mengen (S. 71 und 89)

D) Durchführung:

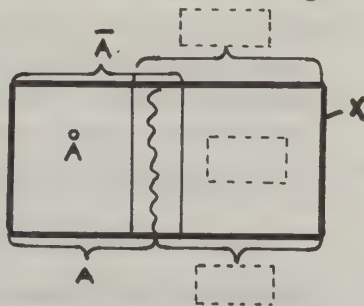
1. Schritt: Formulierung der Vermutung.

Eine stark vergrößernde Skizze lässt das Ergebnis sofort vermuten:

Aufgabe: Füllen

Sie die leeren

Kästchen aus!



Komplementär_mengen könnten sein:

A und $X \setminus A$ sowie $\bar{A}$ und $X \setminus \bar{A}$

Also:

$$X \setminus \bar{A} = \dots\dots$$

2. Schritt: Nachweis.

Man sammelt die Vorkenntnisse:

- a) $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A
- b) $\bar{A} = \bigcup_{B \text{ abgeschl.}} A \subseteq B$
- c) $x \in \bar{C} \iff C \text{ ist Umgebung von } x$

Aufgabe: Versuchen Sie, eine dieser Voraussetzungen in die vermutete Formel einzusetzen und leiten Sie dann die Formel her!

(Gruppendiskussion)

3. Schritt: Vortrag der verschiedenen Ergebnisse (durch Schüler) und Diskussion.

4. Schritt: Formulierung des Algorithmus.

Kann man mit dieser Formel jetzt abgeschlossene Hüllen bestimmen ?

- ja

Beschreiben Sie diesen Vorgang so einfach wie möglich, sodass er auch von einem Mitschüler durchgeführt werden kann, der heute gefehlt hat.

- Erstellung eines Flussdiagrammes (gemeinsam)

5. Schritt: Anwendung und Übung des Algorithmus.

Suchen Sie selbst ein Beispiel, in dem dieser Algorithmus angewendet werden kann! (Einzelarbeit)

Besprechung einiger Vorschläge.

Übungsaufgaben (s. S. 89/90)

3) Bilder von Topologien. (zu § 6, S. 106)

- A) Lernziele
- a) Vorverständnis für die topologischen Morphismen (stetige Abbildungen).
 - b) Eigenschaften von Abbildungen (surjektiv, injektiv, bijektiv).
 - c) Übung im Falsifizieren einer Vermutung: Angabe von Gegenbeispielen.
 - d) Übung im Definieren.

B) Erläuterung: Das Problem der Übertragung von Topologien ist auch ohne entsprechende Vorerfahrung keineswegs irrelevant. Schliesslich ist es eine häufig geübte Praxis (nicht nur in der Mathematik), Probleme in einen möglichst leicht zu überschauen¹ den Rahmen zu transferieren (Beispiel: Projektion räumlicher Gebilde in die Zeichenebene). Selbstverständlich müssen dabei die für das Problem wesentlichen Eigenschaften invariant sein. Für topologische Probleme gilt es also, die zugrundeliegende Topologie mit zu übertragen.

Die Definition der topologischen Morphismen ist nun keineswegs selbstverständlich. Man würde viel eher eine Definition analog zu der der Morphismen in algebraischen und Ordnungsstrukturen erwarten. Dort heisst es

$$\begin{array}{lll} f: & X & \text{-----}> Y \\ & a + b = c & \implies f(a) + f(b) = f(c) \\ & a < b & \implies f(a) < f(b) \end{array}$$

entsprechend:

$$A \text{ ist offen in } X \implies f(A) \text{ ist offen in } Y$$

Diese "offenen" Abbildungen haben jedoch nur eine geringe Bedeutung. Das erläutert man durch den Nachweis, dass das Bild einer Topologie i.a. nicht wieder eine Topologie ist.

Dieser Nachweis ist auch darüber hinaus noch von Nutzen:

Er zeigt ganz klar die Richtung zur Definition der Stetigkeit und es ergeben sich als Nebenprodukte die wichtigen Abbildungseigenschaften Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.

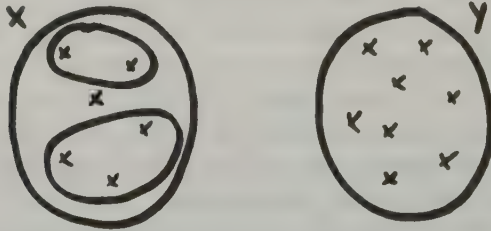
C) Vorkenntnisse: Definition der Topologie

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

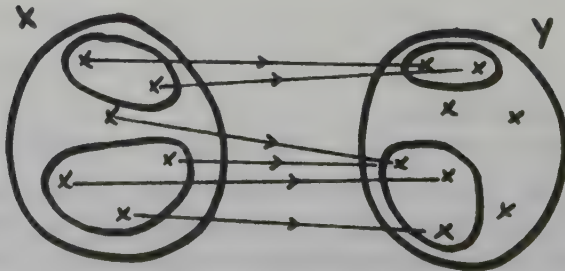
D) Durchführung:

Man gibt zwei Mengen X, Y im Venndiagramm vor und zeichnet Teilmengen der Menge X aus:



Aufgabe: Das Teilmengensystem auf X ist auf die Menge Y zu "übertragen".

Das provoziert Abbildungen zwischen X und Y sowie die Auszeichnung der Bildmengen, etwa



Das Problem wird nun spezialisiert:

Aufgabe: Auf X ist eine Topologie $\mathcal{T}$ gegeben. Sie soll auf Y übertragen werden (d.h. es soll eine Topologie auf Y entstehen).

Vermutung: Die Bilder der offenen Mengen aus X ergeben eine Topologie auf Y .

Formulierung (gemeinsam):

$\mathcal{T} = \{f(A) : A \in \mathcal{T}\}$ ist eine Topologie auf Y .

Diese Vermutung kann man selbstverständlich sofort durch ein Gegenbeispiel zu Fall bringen:

Aufgabe (+) (Einzelarbeit): Geben Sie auf $X = \{a, b, c, d\}$ eine Topologie $\mathcal{T}$ sowie zwischen X und $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ eine Abbildung f an. Erzeugt f eine Topologie auf Y ?

Man kann sich natürlich mit den Gegenbeispielen, die diese Aufgabe liefert, zufriedengeben. Dann hat man jedoch keine Vorstellung davon, warum die Vermutung scheitern musste und wie sie modifiziert werden kann, um zum Erfolg zu kommen. Insbesondere besteht keine Motivation dafür, sich jetzt mit den Urbildern offener Mengen zu beschäftigen.

Aufgabe (+) ergibt sicher auch Beispiele bijektiver Abbildungen, die eine Topologie auf Y erzeugen. Die Frage, ob es Bedingungen gibt, unter denen die obige Vermutung doch sinnvoll ist, ist also begründet. Sie lässt sich sicher nur beantworten, indem man das Mengensystem

$$\mathcal{T} = \{f(A) : A \in \mathcal{T}\}$$

hinsichtlich der Topologieaxiome überprüft.

(T1): $\emptyset \in \mathcal{T}$ wegen $\emptyset = f(\emptyset)$ und $\emptyset \in \mathcal{V}$
(gemeinsame Erarbeitung)

(T2): Gruppenarbeit.

Man erhält die Bedingung

$$f(X) = Y$$

Dazu einige Beispiele in Pfeildiagrammen und
im kartesischen Koordinatensystem.

Man gibt Abbildungen mit dieser Eigenschaft
einen Namen (Lehrer):

Eine Abbildung $f: X \dashrightarrow Y$ heisst surjektiv

$$\Leftrightarrow f(X) = Y$$

(T3): Aufgabe: Untersuchen Sie zuerst den einfacheren
Fall der Vereinigung von zwei Mengen
aus $\mathcal{T}$.
(Gruppenarbeit)

Lösung: $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A = f(A'), B = f(B')$
 $A', B' \in \mathcal{V}$

$\Rightarrow A \cup B = f(A') \cup f(B') = f(A' \cup B') \in \mathcal{T}$
denn $A' \cup B' \in \mathcal{V}$

Um diesen Schluss auch auf beliebige Vereinigungen ausdehnen zu können, braucht man offensichtlich

$$\bigcup_i f(A_i) = f\left(\bigcup_i A_i\right)$$

Beweis im Lehrer-Schüler-Gespräch (Beweisandeutungen s. S. 98).

(T4): Gruppenarbeit.

Ergebnis: Der Beweis von (T3) lässt sich nicht
analog übertragen, da man nur

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

hat.

Beispiel (Lehrer):



$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, Y\}$$

ist keine Topologie.

Man braucht also

$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \text{ f\"ur alle } A, B \subset X. \quad (!)$$

bzw., da $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ immer erf\"ullt ist,
nur $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ (!!)

Das ist eine nur schwer nachpr\"ufbare Bedingung, wie
man an einfachen Beispielen leicht zeigt. Sie l\"asst
sich jedoch vereinfachen (Lehrervortrag):

Setzt man $A = \{x\}$ und $B = \{y\}$ mit $x \neq y$,
So folgt aus (!!)

$$f(\{x\}) \cap f(\{y\}) \subset f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{also } f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \emptyset$$

$$\text{oder } f(x) \neq f(y)$$

Insgesamt: Unter Voraussetzung von (!!) gilt

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \quad (!!!)$$

d.h. verschiedene Elemente haben auch verschiedene
Bilder.

Beispiele im Pfeildiagramm zeigen: bei jedem Element
der Zielmenge kommt h\"ochstens ein Pfeil an.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass man aus (!!!) auch (!!)
herleiten kann. (Gruppenarbeit)

Ergebnis: (!!) und (!!!) sind gleichwertig. (!!!)
l\"asst sich jedoch entschieden leichter
verifizieren.

Man gibt solchen Abbildungen wieder einen Namen:

Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heisst injektiv $\iff$
 $(x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$

Man rekapituliert:

Die Vermutung zur Topologieübertragung war nicht ganz richtig, weil

- a) $f(X) = Y$
und b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

nicht immer gewährleistet ist.

Nur spezielle Abbildungen leisten das:
Sie müssen surjektiv und injektiv sein.

Man kann diese beiden Begriffe zusammenfassen, indem man noch eine Abkürzung einführt:

Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heisst bijektiv $\iff$
 f ist surjektiv und injektiv.

Insgesamt:

Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow Y$ bijektiv, so ist

$$\tau = \{f(A) : A \in \tau\}$$

eine Topologie auf Y .

Einige einfache Beispiele zeigen, dass man mit den bijektiven Abbildungen einen relativ seltenen Spezialfall vorliegen hat:

Aufgabe: Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen
 $X = \{a, b, c, d\}$ und $Y = \{1, 2, 3\}$ an.

Aufgabe: Wann gibt es zwischen zwei endlichen Mengen eine bijektive Abbildung?

Man hat jetzt also die Eingangsvermutung verbessert, kann aber dafür nur selten eine Topologieübertragung vornehmen.

Eine weitere Betrachtung der "Störfaktoren (s. a) und b) S. 243) zeigt, wie die Vermutung mit Aussicht auf Erfolg abzuändern ist:

Es gilt nicht $f(X) = Y$ und $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
aber $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Das legt nahe:

Ist $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f: X \dashrightarrow Y$ eine Abbildung, so ist (wahrscheinlich)

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf X .

Damit hat man die nächste Problemstellung schon vorgegeben.

4) Die Definition des zusammenhängenden Raumes und
Verifikation eines Beispiels (zu § 11, S. 174/175)

- A) Lernziele: a) Verständnis für die Definition zusammenhängender Räume
b) Übung des indirekten Beweises

B) Erläuterung: Die Definition des Zusammenhanges wirkt ohne Vorbereitung wohl unverständlich. Man kann sie zwar von der Anschauung her plausibel machen, hat dann aber keinen Grund, sie neben die bereits bekannte und weit anschaulichere Definition des Wegzusammenhanges zu stellen. Auch scheint es günstiger, mit der Definition gleich ein Anwendungsbeispiel mitzuliefern. Dies ermöglicht der Nachweis der scheinbaren Trivialität, dass ein metrischer Raum mit zwei Elementen nicht wegzusammenhängend ist. Man benötigt dabei dreimal einen indirekten Beweis, sodass hier ganz sicher ein Übungseffekt erreicht werden kann.

- C) Vorkenntnisse: Definition des Wegzusammenhanges
$$\mathbb{F}^1(A \cup B) = \mathbb{F}^1(A) \cup \mathbb{F}^1(B)$$
$$\mathbb{F}^1(A \cap B) = \mathbb{F}^1(A) \cap \mathbb{F}^1(B)$$

- D) Durchführung:

Eine zweipunktige Menge $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^2$ scheint offensichtlich nicht wegzusammenhängend, da es nicht gelingen will, einen Verbindungsweg zwischen a und b in $\{a, b\}$ anzugeben (probieren!).

• b

a •

Das ist jedoch kein Beweis, dass es tatsächlich keinen gibt, zumal wenn die Punkte a und b sehr dicht zusammenliegen.

Es gibt nur eine Möglichkeit für einen solchen exakten Beweis: Man zeigt, dass es einen solchen Weg gar nicht geben kann, d.h. dass die Annahme, es gebe einen Verbindungsweg, sich zu einem Widerspruch führen lässt:

Indirekter Beweis!!

Annahme: Es gibt eine stetige Abbildung

$$f: [0,1] \longrightarrow \{a,b\} \text{ mit}$$

$$f(0) = a \text{ und } f(1) = b$$

Das bedeutet: Das Urbild jeder offenen Menge in $\{a,b\}$ ist in $[0,1]$ offen!

(Bis hierher Erarbeitung in gemeinsamer Diskussion
Lehrer - Klasse)

Aufgabe: Welche offenen Mengen gibt es in $\{a,b\}$?

Welche Eigenschaften haben ihre Urbilder in $[0,1]$? (Gruppenarbeit)

Ergebnis: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(\{a,b\}) = [0,1]$ sind vollständig bekannt. Sie sind offen (Spurtopologie auf $[0,1]$!)

$A = f^{-1}(\{a\})$ und $B = f^{-1}(\{b\})$ haben folgende Eigenschaften:

a) A und B sind offen (nach Annahme!)

b) $0 \in A$ und $1 \in B$

c) $A \cap B = \emptyset$

d) $A \cup B = [0,1]$

anschaulich:



Eine solche Zerlegung von $[0,1]$ scheint nicht möglich zu sein ($[0,1]$ ist wegzusammenhängend), aber wer

kann dafür garantieren?

Wieder ist ein exakter Beweis nötig, der auf dasselbe Problem wie oben führt:

Alle möglichen Zerlegungen von $[0,1]$ in zwei disjunkte Teilmengen können unmöglich untersucht werden.

Es bleibt also wieder nur der indirekte Beweis.

(gemeinsame Erarbeitung)

Er wird am besten zunächst an einem vereinfachten Fall durchgeführt (vom Lehrer vorgegeben):



Das Problem besteht offensichtlich in der "trennenden" Zahl s .

Ihre Eigenschaften: $0 < s < 1$ (1)

s ist die kleinste Zahl

mit $x \in A \Rightarrow x \leq s$ (2)

s ist die grösste Zahl mit

$x \in B \Rightarrow x \geq s$ (3)

(2) und (3) sind dabei offensichtlich gleichwertig.

Bemerkung: Für den (wahrscheinlichen) Fall, dass Suprema und Infima nicht genügend behandelt wurden, muss man sich mit anschaulichen Überlegungen behelfen. Darauf sind auch die obigen Formulierungen zugeschnitten.

Aufgabe: Liegt s in A oder in B ? (Gruppenarbeit)

Lösung wieder durch indirekten Beweis:

Angenommen, s liege in A .

A ist offen $\Rightarrow$ Es gibt ein offenes Intervall um s , das ganz in A liegt:



$\Rightarrow \bigvee_{t \in A} t > s$ Widerspruch zu (2)

Also: $s \notin A$
 Analog: $s \notin B$ } $s \notin A \cup B = [0,1]$ Widerspruch zu (1)

Nun kann man auf eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$ verallgemeinern (Lehrerdarbietung):



(2') $s' := \sup A$ (Formulierung wie in (2)).

(3') läßt sich nicht entsprechend formulieren, wohl aber

(1') $0 < s' < 1$

denn $0 \in A$, $1 \in B$ und A und B sind offen.

Wörtlich wie oben zeigt man: $s' \notin A$.

Annahme: $s' \in B$.

Die offene Menge B enthält dann sogar ein Intervall $]s'-r, s'+r[$. Für jedes $x \in A$ gilt damit natürlich

$$x < s' - \frac{r}{2} < s'$$

Also: $s' \neq \sup A$. Widerspruch zu (2').

Insgesamt hat man wieder $s' \notin A \cup B = [0,1]$.

Die Annahme, das Intervall $[0,1]$ ließe sich in zwei Mengen A, B mit

- a) $0 \in A$ und $1 \in B$ ($A \neq \emptyset \neq B$)
- b) A und B offen (in $[0,1]$)
- c) $A \cup B = [0,1]$ und $A \cap B = \emptyset$

zerlegen, wurde also zu einem Widerspruch geführt: sie ist falsch.

Eine solche Zerlegung wäre aber notwendig dafür, daß die Menge $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend ist:

auch das ist also nicht richtig.

Die Zerlegungseigenschaften a) - c), die die wegzusammenhängende Menge $[0,1]$ nicht besitzt, hat ganz offensichtlich die nicht wegzusammenhängende Menge $\{a,b\} \subset \mathbb{R}^2$. Der Verdacht liegt nahe, dass man damit eine neue Beschreibung des Wegzusammenhanges gefunden hat, die zumindest auf endlichen Mengen sehr viel einfacher zu verifizieren ist als die Definition (11.1).

Obwohl dieser Verdacht sich auch noch anschaulich sehr gut erhärten lässt (s. S. 259 u.), sollte man, solange kein Beweis vorliegt, lieber vorsichtig sein. Immerhin hat man (auch anschaulichen) Grund genug, zu sagen:

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heisst zusammenhängend, wenn es keine zwei Teilmengen A, B gibt mit

- a) $A \neq \emptyset \neq B$
- b) A und B sind offen
- c) $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = X$

Diese Definition lässt sich noch entschieden besser formulieren (gemeinsame Erarbeitung):

- c) ist gleichwertig mit $B = X \setminus A$
- b) bedeutet deshalb A und B sind offen und abgeschlossen

und a) zeigt: $\emptyset \neq A \neq X$ und $\emptyset \neq B \neq X$

a) - c) sind deshalb gleichwertig mit:

Es gibt nichttriviale Teilmengen von X , die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Da der Ausdruck "nichttriviale Teilmengen" nicht exakt definiert und vermutlich auch nicht allgemein geläufig ist, andererseits aber $\emptyset$ und X immer zugleich offen und abgeschlossen sind, formuliert man am besten so:

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

5) Untersuchungen zur Eindeutigkeit von Grenzwerten

(zu § 14, S. 199 - 202)

- A) Lernziele: a) Definition des Hausdorffraumes und des Häufungspunktes (bzw. isolierten Punktes) einer Menge
b) Vertiefung der Kenntnis über die stetigen Funktionen
c) Übung im Mathematisieren

B) Erläuterung:

Bislang wurden hauptsächlich reellwertige stetige Funktionen behandelt. Sie erweckten den Eindruck, dass eine stetige Funktion kaum variiert werden kann, ohne unstetig zu werden. Woran dies liegt, ist jedoch keineswegs klargeworden. So besteht auch sicher die Neigung, bei Grenzwerten die Eindeutigkeit vorauszusetzen, zumal bei der Einführung des Grenzwertbegriffes wiederum keine abweichenden Erfahrungen gemacht wurden (nur so war eine begriffliche Verwirrung zu verhindern).

Man kann nun an einfachen Beispielen klarmachen, dass eine stetige Ergänzung keineswegs eindeutig sein muss. Dabei sind allerdings die beiden Faktoren, die die Eindeutigkeit bewirken, getrennt zu behandeln, da sonst keine klaren Begriffsbildungen möglich sind.

An erster Stelle muss die beliebige stetige Ergänzbarkeit in isolierten Punkten behandelt werden, da die Ableitung der Definition des Hausdorffraumes erst möglich ist, nachdem dieser Fall ausgeschaltet ist.

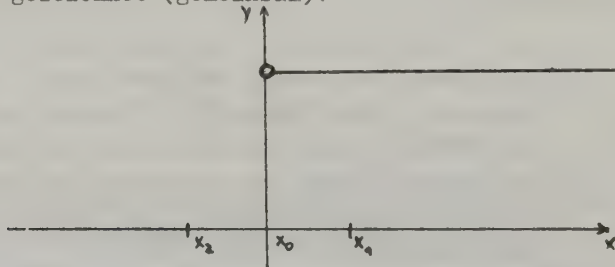
Die Erarbeitung beider Begriffe ist typisch für die mathematisierende Arbeitsweise: Beispiele für nicht eindeutige Grenzwerte motivieren zur Suche nach Bedingungen, die die gewünschte Eindeutigkeit gewährleisten (und nach Gründen, warum die zuvor

behandelten Fälle den Eindruck hervorrufen konnten, Grenzwerte seien immer eindeutig). Aus der Existenz mehrerer Grenzwerte sucht man dann möglichst einfache Bedingungen abzuleiten, deren Negation dann die Eindeutigkeit gewährleistet (indirekter Schluss).

C) Vorkenntnisse: Definition des Grenzwertes
Spurtopologie

D) Durchführung:

Der Graph der Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2$
wird gezeichnet (gemeinsam):



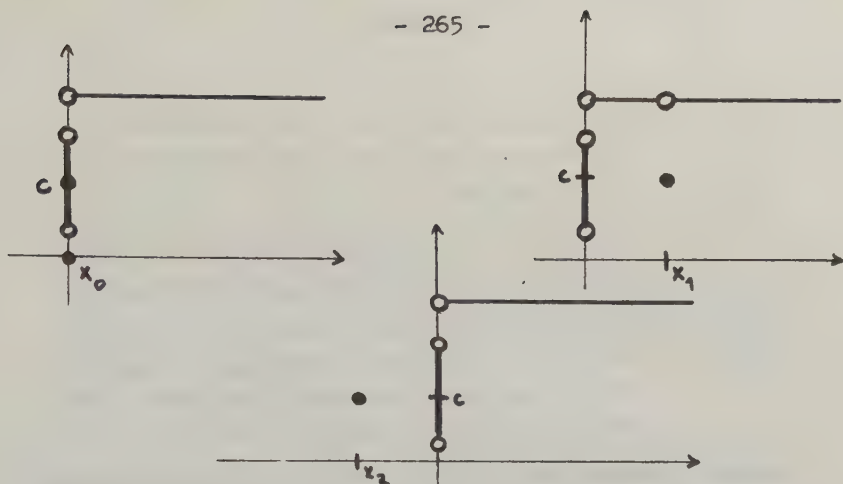
Aufgabe: Bestimmen Sie sämtliche Grenzwerte von f in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.
(Gruppenarbeit)

Lösung: In allen drei Punkten ist selbstverständlich $b = 2$ Grenzwert, da die konstante Funktion

$$\underline{f}(x) = 2$$

immer stetig ist.

Über einen möglichen Grenzwert $c \neq 2$ schafft eine Skizze Klarheit:



Die Umgebungen von $c \neq 2$ zerfallen offensichtlich in zwei Klassen:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2 \in U & \implies \underline{f}^{-1}(U) = \mathbb{R}^+ \cup \{x_i\} \quad (i = 0, 1, 2) \\ & \implies \underline{f}^{-1}(U) \text{ ist Umgebung von } x_i \text{ (in } \mathbb{R}^+ \cup \{x_i\}) \end{aligned}$$

$$2) \quad 2 \notin U \implies \underline{f}^{-1}(U) = \{x_i\}$$

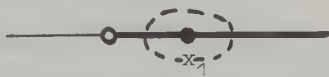
$c \neq 2$ ist also genau dann Grenzwert, wenn $\{x_i\}$ Umgebung von x_i in $\mathbb{R}^+ \cup \{x_i\}$ ist.

Das ist der Fall für x_2 , für x_0 und x_1 nicht.

Anschaulich: (Spurtopologie!!!)



$$\{x_0\} \notin \mathcal{U}(x_0)$$



$$\{x_1\} \notin \mathcal{U}(x_1)$$



$$\{x_2\} \in \mathcal{U}(x_2)$$

Ohne Schwierigkeiten sieht man ein:

$$x_3 < 0 \implies f \text{ ist in } x_3 \text{ ganz beliebig stetig ergänzbar.}$$

$$x_4 \geq 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_4} f(x) = 2 \quad (\text{der Grenzwert ist eindeutig}).$$

Die Frage: "Wann kann man eine stetige Funktion
 $f: A \longrightarrow Y$ in x_0 ganz beliebig stetig ergänzen?

kann nun zweifach beantwortet werden:

- a) wenn $\{x_0\}$ Umgebung von x_0 in $A \cup \{x_0\}$ ist
- b) wenn $x \notin \bar{A}$.

Fall a) Die Abkürzung dieser Formulierung durch die Einführung eines neuen Begriffes muss zweifellos kaum mehr motiviert werden:

x_0 heisst isoliert(er Punkt) bezüglich A $\iff$
 $\{x_0\}$ ist Umgebung von x_0 in $A \cup \{x_0\}$.

Fall b) Diese Antwort steht mit allen bisher behandelten Beispielen voll im Einklang und zeugt daher von guter Beobachtungsgabe. Sie gibt auch die übliche Einschränkung für die stetige Ergänzung von Funktionen (die in 14.1 nicht gemacht wurde) wieder, beantwortet aber die hier gestellte Frage nicht ganz korrekt, was man durch ein Beispiel zeigen kann:

Aufgabe: $\mathbb{N}$ sei mit der Spurstopologie zu $\mathbb{Z}_n$ versehen.

Die Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
 $x \longmapsto 3$

Geben Sie alle Grenzwerte von f in einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

Die Aufgabe zeigt, dass b) eine unzulässige Vereinfachung von a) ist, denn auch in allen Berührungspunkten von $\mathbb{N}$ konnte f beliebig stetig ergänzt werden.

Damit ist man genau wie im Falle a) an einer Stelle angelangt, wo die Einführung eines neuen Begriffes günstig erscheint (s.o.).

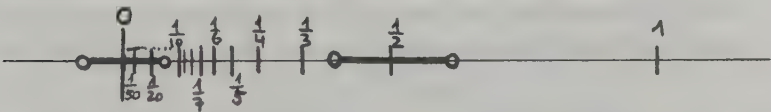
Zur Vertiefung dieses Begriffes dürfte die Veranschaulichung durch Venndiagramme nicht sehr geeignet sein,



da sie eher eine Assoziation wie in Antwort b) nahelegt. Man muss noch Beispiele von Mengen behandeln, die isolierte Punkte enthalten.

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Punkte von $\mathbb{R}$, die bezüglich $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ isoliert liegen.
(Diskussion der ganzen Klasse)

Die Lösung ist anschaulich klar:



Zu jedem Punkt $x \in A$ (hier z.B. $x = \frac{1}{2}$) gibt es eine Umgebung U (in $\mathbb{R}$), die ausser x keinen Punkt aus A enthält. $U \cap A = \{x\}$ ist daher Umgebung von x in A .

Andererseits enthält jede Umgebung V von 0 auch (unendlich viele) Punkte aus A :

0 ist der einzige nicht isolierte Punkt von A .

Weitere Beispiele: s. S. 201

Obwohl inzwischen gezeigt wurde, dass "nicht isoliert" nicht mit "Berührungspunkt" identisch ist, scheint hier eine weitere Klärung notwendig zu sein. Zu sehr wird diese Identifikation durch die Veranschaulichungen (siehe Venndiagramm) nahegelegt.

Aufgabe: Zeigen Sie (durch einen indirekten Schluss),
dass jeder nicht isolierte Punkt einer Menge
A auch Berührungspunkt ist. (Gruppenarbeit)

Der Hinweis, einen indirekten Beweis zu versuchen, ver-
hindert Formulierungsprobleme, die sich bei einem (durch-
aus möglichen) direkten Beweis ergeben. So sieht man:

Ist x_0 kein Berührungspunkt von A, so gibt es nach 5.4
eine zu A disjunkte Umgebung U von x_0 (s. Skizze S. 267)

$$\begin{aligned} \text{Wegen } U \cap (A \cup \{x_0\}) &= (U \cap A) \cup (U \cap \{x_0\}) \\ &= \emptyset \cup \{x_0\} \\ &= \{x_0\} \end{aligned}$$

Ist $\{x_0\}$ Umgebung von x_0 in $A \cup \{x_0\}$:

x_0 liegt isoliert bezüglich A.

Umgekehrt ist daher jeder nicht isolierte Punkt auch
Berührungspunkt von A.

Impuls: Wir haben schon gezeigt (s. Beisp. S. 267),
dass es bei speziellen Mengen A Berührungs-
punkte von A gibt, die bezüglich A isoliert
sind. Wodurch unterscheiden sich solche Punkte
von Nicht-Berührungspunkten von A, die ja eben-
falls bezüglich A isoliert sind?

Die Skizze auf S. 267 zeigt (für das Beispiel $x_0 = \frac{1}{2}$),
dass es zu solchen Punkten x_0 eine Umgebung U gibt mit

$$U \cap A = \{x_0\}$$

Die Eigenschaft von Berührungspunkten

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}(x_0)} U \cap A \neq \emptyset$$

beschreibt daher nicht isolierte Punkte nicht ausreichend.

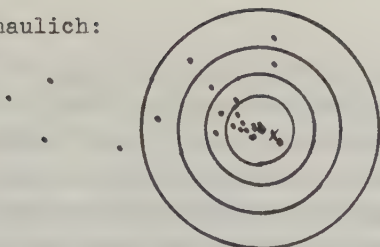
Hinzu kommt

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}(x_0)} U \cap A \neq \{x_0\}$$

Eine neue Begriffsbildung fasst die Ergebnisse zusammen:

x_0 heisst <u>Häufungspunkt</u> einer Menge A	$\Leftrightarrow$
x_0 liegt nicht isoliert bezüglich A	$\Leftrightarrow$
$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}(x_0)} U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A \neq \{x_0\}$	

Anschaulich:



Der Anschauung entnimmt man auch die Gleichwertigkeit der eben gefundenen Formulierung mit der üblichen Definition

x_0 heisst Häufungspunkt von A , wenn jede Umgebung von x_0 einen von x_0 verschiedenen Punkt aus A enthält.

Diese verbale Beschreibung ist wohl leichter zu durchschauen als die zuerst gefundene, die andererseits die Beziehung zwischen Berührung- und Häufungspunkten einer Menge deutlicher macht.

Die Frage, ob der neue Begriff an dieser Stelle überhaupt nötig ist, kann nicht ganz eindeutig beantwortet werden. Die Überlegungen zur Eindeutigkeit von Grenzwerten sind zwar durch die Definition der isolierten Punkte zunächst abgeschlossen, andererseits ist der Begriff des Häufungspunktes in der Literatur häufiger gebraucht als der des isolierten Punktes (man erleichtert also ein eventuelles Studium von Sekundärliteratur) und er erlaubt auch im Zusammenhang mit dem Begriff des Häufungspunktes von Folgen einige reizvolle Überlegungen (s.S.225). Schliesslich spielt er eine gewisse Rolle als Formulierungshilfe (s. etwa 14.6).

Will man auf die Definition des Häufungspunktes nicht verzichten, so sind einige zusätzliche Beispiele nötig:

Aufgabe: Bestimmen Sie in $\mathbb{R}$ alle Häufungspunkte von
a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$

Aufgabe: Auf $X = \{a, b, c, d\}$ ist eine Topologie so anzugeben, dass die Menge $A = \{a, b\}$ gerade die Häufungspunkte a und c hat.

Nachdem vorübergehend die Festigung der neuen Begriffe im Vordergrund stand, ist es nun an der Zeit, zu der Ausgangsproblematik der Eindeutigkeit von Grenzwerten zurückkehren. Man muss deshalb den Eindruck, dass mit der Definition der isolierten Punkte dieses Problem erledigt sei - dieser Eindruck musste aufgrund der bisher behandelten Beispiele mit Sicherheit entstehen - revidieren. Wieder ist man gezwungen, ein Beispiel vorzugeben, da zunächst kein Grund vorzuliegen scheint, aus dem Bereich der Hausdorffräume auszuweichen. Die einfachsten Verifikationen gestattet wie meist ein Beispiel in endlichen Räumen:

Aufgabe: In $(X, \mathcal{T})$ mit $X = \{a, b, c\}$ und
 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

ist die identische Funktion stetig.

- a) Bestimmen sie die Häufungspunkte (nicht isolierten Punkte) von X . (Einzelarbeit)
- b) Suchen Sie in den nicht isolierten Punkten alle Grenzwerte von f (Gruppenarbeit, getrennt nach den Häufungspunkten b, c .
Anweisung: Zeichnen Sie jeweils ein Pfeildia-
gramm der abgeänderten Funktion $\underline{f}$ und
untersuchen Sie $\underline{f}$ auf Stetigkeit).

Man sieht: f hat in den nicht isolierten Punkten ebenfalls verschiedene Grenzwerte (in $x_0 = b$ die Grenzwerte a, b, c , in $x_1 = c$ die Grenzwerte b und c).

Damit ist das Problem wieder aktuell. Man kann es etwas verschärft formulieren:

Unter welchen Bedingungen hat eine Funktion $f: X \dashrightarrow Y$ in einem nicht isolierten Punkt x_0 höchstens einen Grenzwert?

Da sich auf Anhieb keine solchen Bedingungen anbieten, bleibt - wie schon mehrfach früher - gar keine andere Möglichkeit, als indirekt vorzugehen:

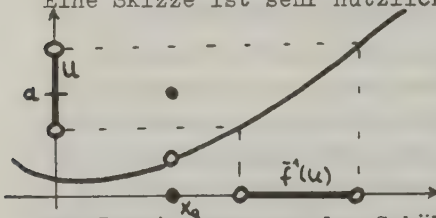
Aus der Annahme, dass in einem nicht isolierten Punkt mehrere Grenzwerte vorliegen, kann man versuchen, möglichst einfache Folgerungen abzuleiten, deren Negation dann impliziert, dass es höchstens einen Grenzwert geben kann.

Da man keine Vorstellung hat, von welcher Art diese Folgerungen sein könnten, muss man sämtliche gegebenen Voraussetzungen zusammenstellen, um sie gegebenenfalls einsetzen zu können.

Angenommene Situation:

- (a) $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ seien topologische Räume.
- (b) $A \subset X$ besitze den nicht isolierten Punkt x_0
(in anderen Punkten braucht man erst gar keine Anstrengungen zu unternehmen).
- (c) $f: A \dashrightarrow Y$ sei stetig und besitze in x_0 die Grenzwerte a und b .
- (b') $\{x_0\}$ ist keine Umgebung von x_0 in $A \cup \{x_0\}$
ist einfach die Definition.
Mehr kann man im Moment nicht tun.
- (c') $\underline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ a & \text{für } x = x_0 \end{cases}$ ist in $A \cup \{x_0\}$ stetig
ebenso wie
 $\underline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ b & \text{für } x = x_0 \end{cases}$
Wenn $\underline{f}$ und $\underline{f}$ in $A \cup \{x_0\}$ stetig sind, so sind sie es insbesondere im Punkt x_0 , d.h.
- (c'') ist U Umgebung von $\underline{f}(x_0) = a$, so ist $\underline{f}^{-1}(U)$ Umgebung von x_0 .
Entsprechendes gilt für jede Umgebung V von b .
(bis hierher gemeinsame Erarbeitung)

Wenn man weiterkommen will, muss man sich über die Gestalt der Urbilder $\bar{F}^1(U)$ und $\bar{F}^1(V)$ klarer werden. Eine Skizze ist sehr nützlich:

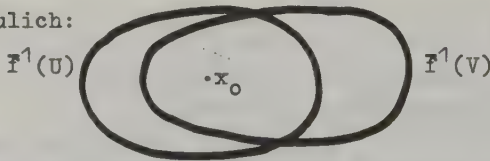


Man vermutet
 $\bar{F}^1(U) = F^1(U) \cup \{x_0\}$

Der Beweis kann von den Schülern selbst geliefert werden.

(c'') Ist U Umgebung von a , so ist $\{x_0\} \cup F^1(U)$ Umgebung von x_0 und
 Ist V Umgebung von b , so ist $\{x_0\} \cup F^1(V)$ Umgebung von x_0 .

Anschaulich:



Damit hat man auch eine weitere Umgebung von x_0 :

$$(\{x_0\} \cup F^1(U)) \cap (\{x_0\} \cup F^1(V)) \quad (\text{s. 3.5})$$

$$= \{x_0\} \cup (F^1(U) \cap F^1(V))$$

An (3.5) wird man wohl erinnern müssen.

Nicht dagegen an (b').

Zusammen ergibt sich:

$$F^1(U) \cap F^1(V) \neq \emptyset$$

Das kann man einfacher schreiben:

$$F^1(U \cap V) \neq \emptyset$$

noch einfacher:

$$U \cap V \neq \emptyset$$

Weiter kann sicher nicht vereinfacht werden.

Wozu auch?

Man weiss: Sind a und b Grenzwerte in dem nicht isolierten Punkt x_0 ,
so haben alle Umgebungen U von a und V von b einen nicht leeren Durchschnitt.

Umgekehrt: Gibt es zu den zwei Punkten a und b (aus Y) disjunkte Umgebungen, so können a und b nicht gleichzeitig Grenzwerte einer (völlig beliebigen) Funktion f in einem nicht isolierten Punkt sein.

Konklusio: Nicht auf die spezielle Gestalt der stetigen Funktion kommt es an, auch nicht auf die Definitionsmenge X , sondern allein auf die Zielmenge Y :

Ein topologischer Raum $(Y, \mathcal{T})$ heisst Hausdorffraum, wenn es zu je zwei Punkten a, b aus Y ($a \neq b$) disjunkte Umgebungen gibt.

Bemerkung: Auf diese Ableitung der Definition des Hausdorffraumes sollte man trotz ihrer Komplexität nicht verzichten. Nur so lässt sich die Definition verständlich machen und vor allem begründen, dass sie sich nicht wesentlich verbessern lässt. Man hat hier allerdings ein Beispiel einer Ableitung vorliegen, das den Lehrervortrag fast durchgehend als geeignete Form der Vermittlung erscheinen lässt.

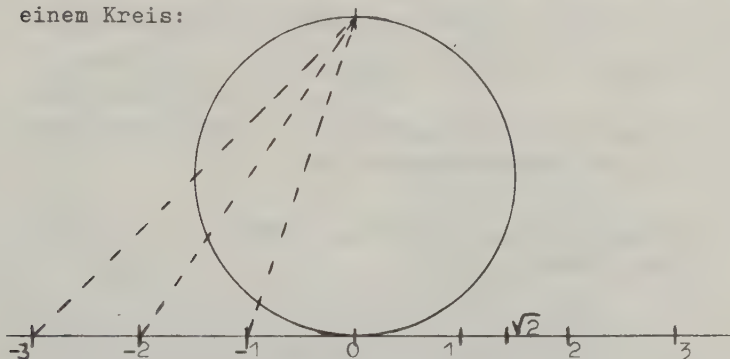
IV.3 16 Arbeitsblätter

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Organisation eines möglichst dezentralisierten Unterrichts (etwa in Form kleiner Arbeitsgruppen) ist der Einsatz von Arbeitsblättern, die die einzelnen Diskussionen unterstützen und straffen, indem sie die notwendigen Voraussetzungen bereitstellen, Problemsituationen formulieren und die notwendigen Impulse geben. Erst in zweiter Linie sind Arbeitskarten auch als Sammlungen von Übungsaufgaben sinnvoll. Diesem Zweck ist deshalb nur eine (A11) der beigefügten Arbeitskarten gewidmet. Sie konzentrieren sich im Übrigen auf das erste Kapitel des Lehrganges, um zu Beginn der Durchführung einige Anregungen zur Gestaltung solcher Arbeitsblätter zu geben.

Die Arbeitsblätter A1 - A10 gehören zu § 1
Arbeitsblatt A11 gehört zu § 2
die Arbeitsblätter A12 und A13 gehören zu § 3 und
A14 - A16 gehören zu § 4.

A1 Kreisdarstellung von $\mathbb{R}$

Eine Skizze veranschaulicht eine Abbildung der Menge der reellen Zahlen in die Menge der Punkte auf einem Kreis:



- a) Bilden Sie die reellen Zahlen $1, \sqrt{2}, 0$ auf dieselbe Weise ab.
- b) Beschreiben Sie die Abbildungsvorschrift geometrisch:

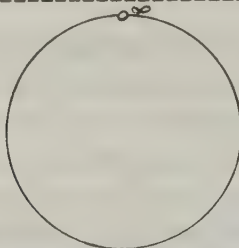
- c) Ist die Abbildung
 - ca) injektiv?
 - cb) surjektiv?
 - cc) bijektiv?

- d) Die gewöhnlichen algebraischen Operationen in $\mathbb{R}$ sind in der neuen "Kreisdarstellung" schwieriger durchzuführen:

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Addition zweier Zahlen nicht als Addition der zugehörigen Winkel (oder Bögen) verstanden werden kann.

Zahlen: $\dots + \dots = \dots$
Winkel: $\dots + \dots = \dots$

A2 Eigenschaften des Abstandes in IR



$d(x,y)$ sei der geometrische Abstand zweier Punkte x,y auf unserem "Kreis" IR .

Tragen Sie drei beliebige Punkte x, y, z ein und füllen Sie aus:

- (a) $d(x,y) \dots 0$
- (b) $d(x,y) = 0 \iff \dots\dots\dots$
- (c) $d(x,y) \dots d(y,x)$
- (d) $d(x,y) \dots d(x,z) + d(z,y)$

Überzeugen Sie sich, dass die Aussageformen (a) - (d) allgemeingültig sind! (Was bedeutet das?)

In der gewöhnlichen Geradendarstellung der reellen Zahlen kennen Sie ebenfalls einen Abstand:

$$d'(x,y) = \dots\dots$$

Untersuchen Sie d' auf die Eigenschaften (a) - (d), indem Sie beliebige Punkte x,y,z einzeichnen.

Sind (a) - (d) allgemeingültig? Ja ☐ Nein ☐

Wieviele verschiedene Fälle waren bei der Untersuchung von (d) zu unterscheiden? ...

A3 Definition des metrischen Raumes

$M = \{a, b, c\}$

Wie gross ist der Abstand zwischen a und b? (?!)

Zeichnen Sie ein Venndiagramm von M und tragen Sie die Abstände ein:

d	a	b	c
a			
b			
c			

Wieviele solcher möglicher "Abstände" gibt es?

.....

Alle haben dieselben Eigenschaften:

- (1) Der Abstand zweier Elemente von M ist eine reelle Zahl.

Eine Abstandsfunktion in einer Menge M ist als Abbildung aufzufassen:

$d: \dots \longrightarrow \dots$

- (2) (a) - (d) sind erfüllt (prüfen Sie das nach!)

Man definiert:

Eine Metrik (Abstandsfunktion) auf einer Menge M ist eine Abbildung $d: \dots \longrightarrow \dots$ mit

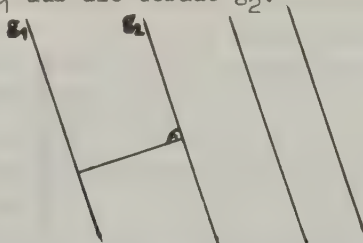
- (a) $d(x, y) \geq 0$
- (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$
- (d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Das Paar (M, d) heisst dann metrischer Raum.

A4 Beispiele metrischer Räume

- 1.) Die Menge der zu einer Geraden g parallelen Geraden einer Ebene.

$d(g_1, g_2)$ = Länge des Lotes von einem Punkt der Geraden g_1 auf die Gerade g_2 .



Zeichnen Sie eine Gerade so ein, dass klar ersichtlich ist, dass oben tatsächlich eine Metrik definiert wurde!

- 2.) M beliebige Menge.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases} \quad \text{heißt "diskrete Metrik".}$$

Zeichnen Sie eine ebene Punktmenge, in der die diskrete Metrik mit dem geometrischen Abstand übereinstimmt:

a)

b)

Wieviele Punkte darf eine räumliche Punktmenge mit derselben Eigenschaft höchstens enthalten? ☐

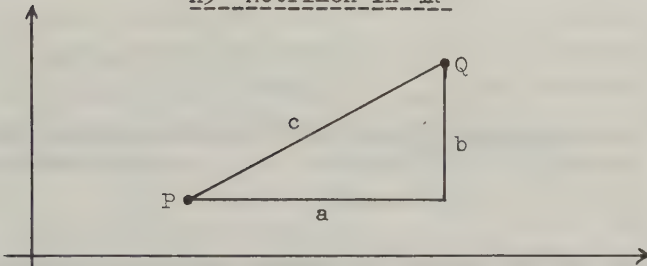
- 3.) $M = \{a, b, c\}$. Vervollständigen Sie die Verknüpfungstafeln so, dass Metriken entstehen:

d_1	a	b	c
a	0	1	2
b		0	1
c			0

d_2	a	b	c
a		1	1
b			
c			0

d_3	a	b	c
a			1
b	2		
c		3	

A5 Metriken in $\mathbb{R}^2$



$$d_1(P, Q) = a + b$$

Drei der links angege-

$$d_2(P, Q) = a$$

benen Abbildungen sind

$$d_3(P, Q) = c$$

Metriken auf $\mathbb{R}^2$:

$$d_4(P, Q) = \max(a, b)$$

d_1 , d_2 und d_3

$$d_5(P, Q) = a - b$$

Die Metriken sind exakt durch die Koordinaten von P und Q auszudrücken:

$$d_1(P, Q) = \dots \quad d_2(P, Q) = \dots$$

$$d_3(P, Q) = \dots$$

Ein Kreis um einen Punkt P mit Radius r kann über den Abstand definiert werden:

$$\text{Kr}(P, r) = \{Q: \dots\}$$

Zeichnen Sie zu jeder der drei Metriken den Kreis $\text{Kr}(P, 3)$

A6 Offene Kugeln

Voraus.: (M,d) metr. Raum, $p \in M$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$

Definition: Eine offene Kugel um p mit Radius r ist
die Menge

$$K(p,r) = \{x: d(p,x) < r\}$$

Veranschaulichen Sie $K(0,1)$ in

a) $\mathbb{R}$ (Geradendarstellung, geom Abstand)

b) $\mathbb{R}$ (Kreisdarstellung, geom. Abstand)

c) $\mathbb{R}^2$ (Zeichenebene, geom. Abstand)

d) $\mathbb{R}^2$ mit Metrik d_1 von A5

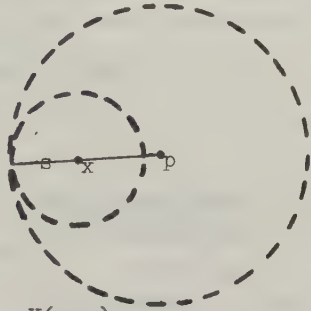
.0

Berechnen Sie in $\mathbb{R}$ bei der diskreten Metrik

a) $K(0, \frac{1}{2}) = \dots$ b) $K(0,1) = \dots$ c) $K(0,2) = \dots$

A7 Definierende Eigenschaft offener Mengen

Wir zeigen: Jede offene Kugel enthält mit jedem Punkt x auch eine offene Kugel um x .



$$\text{d.h.} \quad \bigwedge_{x \in K(p,r)} \bigvee_{s > 0} K(x,s) \subset K(p,r)$$

$$\text{d.h.} \quad y \in K(x,s) \implies \dots\dots\dots$$

Wir drücken das durch die Metrik d aus:

$$(!) \quad \dots\dots\dots \implies \dots\dots\dots$$

Die Skizze zeigt, wie gross s höchstens zu wählen ist:

$$s = \dots\dots\dots$$

Nun kann man (!) nachweisen. (Ansatz mit der Dreiecksungleichung)

Zeigen Sie anschaulich, dass eine abgeschlossene Kugel im Regelfall nicht dieselbe Eigenschaft besitzt!

A8 Beispiele offener Mengen

Metrischer Raum $(\mathbb{R}^2, d_n)$

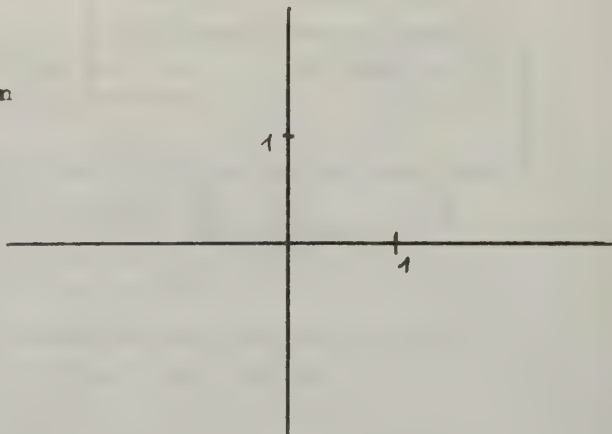
$A \subset \mathbb{R}^2$ ist offen $\Leftrightarrow \bigwedge_{(x,y) \in A} \bigvee_{r>0} K((x,y), r) \subset A$

1.) Veranschaulichen

Sie die Mengen

$$A = \{(x,y) : y > x\}$$

$$B = \{(x,y) : 0 < y + x - 2\}$$



2.) Zeigen Sie anschaulich, dass A und B offen sind.

3.) Berechnen Sie für $(x,y) \in A$ (bzw. $(x,y) \in B$) den grösstmöglichen Radius einer offenen Kugel mit $K((x,y), r) \subset A$ (bzw. $K((x,y), r) \subset B$).

$$r_A \leq \dots\dots\dots$$

$$r_B \leq \dots\dots\dots$$

4.) $A \cup B$ ist offen - nicht offen ¹⁾

$$r_{A \cup B} \leq \dots\dots\dots$$

$A \cap B$ ist offen - nicht offen

$$r_{A \cap B} \leq \dots\dots\dots$$

$A \setminus B$ ist offen - nicht offen

$$r_{A \setminus B} \leq \dots\dots\dots$$

¹⁾ Nichtzutreffendes bitte streichen

²⁾ Nur ausfüllen, wenn die entsprechende Menge offen ist.

A9 Offene Mengen in $\mathbb{R}$

Gegeben ist der metrische Raum $(\mathbb{R}, d_n)$.

Die offenen Kugeln sind die offenen Intervalle

$$]p-r, p+r[= \{x: p-r < x < p+r\}$$

- 1.) Schreiben Sie die Definition der offenen Menge für den Spezialfall $(\mathbb{R}, d_n)$ um:

$A \subset \mathbb{R}$ ist offen $\Leftrightarrow$

.....

- 2.) Jedes offene Intervall $]a, b[$ ist eine offene Menge:



Beweis: Man wählt $r \leq$

- 3.) Sind $]a_i, b_i[$ offene Intervalle ($i \in I$), so ist

$\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$ offen.

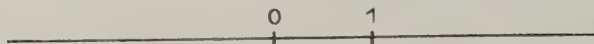


Beweis:

A9 (Forts.)

4.) Prüfen Sie die angegebenen Mengen, ob sie offen sind und versuchen Sie, sie als Vereinigungen offener Intervalle darzustellen!

a) $A = \{x: x^2 < 4\}$ ist - nicht - offen ¹⁾



A =
.....

b) $B = \{x: x^2 + x - 1 = 0 \vee x > 2\}$ ist - nicht - offen



B =
.....

c) $C = \mathbb{R}$ ist - nicht - offen



C =
.....

d) $D = \mathbb{N}$ ist - nicht - offen



$\mathbb{N}$ =
.....

¹⁾ Für den Fall, dass ~~die~~ Menge offen ist, ist - nicht - zu streichen.

A10 Mengenoperationen mit offenen Mengen

(M,d) sei ein metrischer Raum, A,B seien offene Mengen in M.

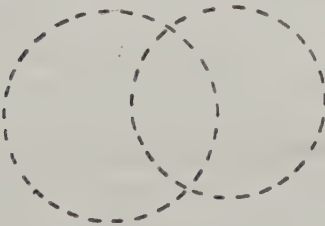
A heisst offen in M $\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow \bigvee_{r>0} K(x,r) \subset A)$

Wir prüfen alle bekannten Mengenoperationen, die nicht aus M hinausführen:

1.) Vereinigung:

A $\cup$ B ist offen ☐
 nicht offen ☐

Nachweis:



Überprüfen Sie Ihren Nachweis darauf, ob er auch bei Vereinigung beliebig vieler offener Mengen durchführbar ist.

Ergebnis:

2.) Durchschnitt:

A $\cap$ B ist offen ☐
 nicht offen ☐

Nachweis:



A10 (Forts.)

Überprüfen Sie Ihren Nachweis wie in 1.)!

Ergebnis:

Sichern Sie das Ergebnis durch zwei Beispiele ab.

3.) Differenzmenge.

Als Beispiel seien die Mengen

$A =]0,2[$ $B =]1,3[$ $C =]3,5[$

gegeben.

$A \setminus B = \{x:$	$\}$	ist	offen	☐
			nicht offen	☐
$A \setminus C =$		ist	offen	☐
			nicht offen	☐

Ergebnis:

A11 Topologien

1.) Geben Sie sämtliche Topologien auf $X = \{u, v\}$ an!

2.) Es sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ergänzen Sie, wo nötig, so, dass Topologien auf X entstehen.

a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{3\}, \{1, 3, 2, 5, 4\}$

b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{2, 4\}, \{5\}, X$

c) $\mathcal{T}_3 = \{\{1, 5\}, \{2, 4, 5\}, \emptyset, \{4, 2, 1, 5\}, \{5\},$

d) $\mathcal{T}_4 = \{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 4, 5\}, \emptyset, X,$

3.) Sei $X = \{\emptyset, a, \{a\}\}$

Ist a) $\{\{\emptyset\}, X$ b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, X$

c) $\{\emptyset, a, \{a\}, X$ d) $\{\emptyset, \{a\}, \{a, \{a\}\}, X$

eine Topologie auf X ?

4.) $\mathcal{T} = \{A, B, A \cup B, A \cap B\}$

Geben Sie Mengen A, B, X so an, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X bildet.

5.) X sei eine beliebige (nicht leere) Menge.

Suchen Sie die kleinste und die grösste Topologie auf X .

Wieviele Elemente enthalten sie, wenn X aus n Elementen besteht?

6.) Sei $X = \mathbb{N}$. Sind die folgenden Mengen Topologien auf X ?

a) $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \{1, 2, \dots, 2n\}, \dots\}$

b) $\{A: A \text{ ist endliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ oder } A = \mathbb{N}\}$

c) $\{A: A \text{ enthält keine gerade Zahl}\} \cup \{\mathbb{N}\}$

7.) Zeigen Sie: Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf einer Menge X , so auch $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Gilt dasselbe auch für $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$?

A12 Der offene Kern

Der offene Kern $\mathring{A}$ einer Menge A ist die grösste offene Teilmenge von A . (1)

1.) In $(\mathbb{R}, \tau_n)$ sei

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \mathring{A} = \dots\dots\dots$$

$$B = \{x: |x| < 1\} \quad \mathring{B} = \dots\dots\dots$$

$$C = \{x: 1 \leq x \leq 2\} \quad \mathring{C} = \dots\dots\dots$$

2.) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

$$a) \quad A = \{a, c\} \quad \mathring{A} = \dots\dots\dots$$

$$b) \quad \mathring{B} = \{a, b\} \quad B = \dots\dots\dots$$

$$c) \quad \mathring{C} = \emptyset \quad C = \dots\dots\dots$$

Geben Sie jeweils sämtliche Lösungen an!

3.) (X, τ) sei ein topologischer Raum und $A \subset X$.

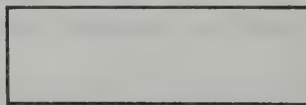
$$\text{Es sei } \mathcal{L} := \{B: B \subset A \wedge B \in \tau\} \quad (2)$$

$$\text{Füllen Sie aus: } \bigcup_{B \in \mathcal{L}} B \quad \dots \quad A \quad (3)$$

$$\bigcup_{B \in \mathcal{L}} B \quad \dots \quad \tau \quad (4)$$

$$B' \in \mathcal{L} \implies B \dots \bigcup_{B \in \mathcal{L}} B \quad (5)$$

Fassen Sie (1) - (5) in einer möglichst kurzen Formel zusammen:



$$4.) \text{ Zeigen Sie: } x \in \mathring{A} \iff \bigvee_{B \in \tau} x \in B \subset A$$

$$x \in \mathring{A} \iff$$

$$\iff \bigvee_{B \in \tau} x \in B \subset A$$

A13 Umgebungen

$U \in \mathcal{U}(x)$ bedeutet: U ist Umgebung von x .
 $U \in \mathcal{U}(x) \iff \bigvee_{B \in \mathcal{B}} x \in B \subset U$

- 1.)
- | | | |
|---------------|------------------|------------------|
| | 0 | 1 |
| | ----- | |
| Ergänzen Sie: | [0,2] ... | $\mathcal{U}(1)$ |
| | [0,1] ... | $\mathcal{U}(1)$ |
| | {1} ... | $\mathcal{U}(1)$ |
| | $\mathbb{R}$... | $\mathcal{U}(1)$ |
| | $\mathbb{Q}$... | $\mathcal{U}(1)$ |

- 2.) Es sei $X = \{1,2,3\}$
a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$
 $\mathcal{U}(1) = \{ \quad , \quad , \quad \}$
 $\mathcal{U}(2) = \{ \quad , \quad \}$
 $\mathcal{U}(3) = \{ \quad \}$

- b) Suchen Sie eine Topologie auf X , sodass
 $\mathcal{U}(1) = \mathcal{U}(2) = \mathcal{U}(3) = \{X\}$ ist.
 $\mathcal{T} = \{$

- 3.) Veranschaulichen Sie in der nachstehenden Skizze
 $U \in \mathcal{U}(x)$.



Beweisen Sie anhand dieser Veranschaulichung:

- a) $U \in \mathcal{U}(x) \wedge U \subset V \implies V \in \mathcal{U}(x)$
b) $U, V \in \mathcal{U}(x) \implies U \cap V \in \mathcal{U}(x)$

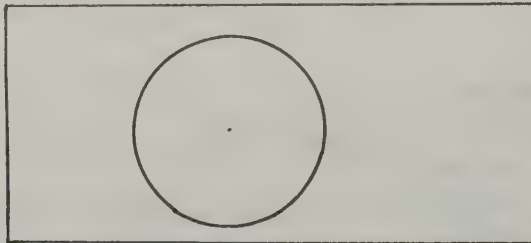
A14 Abgeschlossene Mengen

- 1.) In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ haben die Komplementär Mengen aller abgeschlossenen Intervalle (Beispiel $[0, 2]$) eine gemeinsame wesentliche topologische Eigenschaft:

.....



- 2.) Bestätigen Sie anschaulich, dass das Komplement einer abgeschlossenen Kugel in einem metrischen Raum (M, d) dieselbe Eigenschaft hat:



Diese Eigenschaft verwendet man zu einer Definition:
 $(X, \mathcal{T})$ sei ein topologischer Raum und $A \subset X$.

A heisst abgeschlossen $\Leftrightarrow$

- 3.) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen?

- a) $A = \{x: x \geq 0\}$ ☐
b) $B = \{x: x < 0 \wedge x \geq -2\}$ ☐
c) $C = \{x: x^2 > 2 \vee x < 4\}$ ☐
d) $E = \{x: x+3 > 5 \wedge x-2 < 0\}$ ☐

- 4.) Welche Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind zugleich offen und abgeschlossen?

.....

A15 Systeme abgeschlossener Mengen

In $(X, \mathcal{T})$ ist A abgeschlossen $\Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{T}$

1.) $X = \{a, b, c, d\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

Suchen Sie sämtliche abgeschlossenen Mengen in X:

2.) $X' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Geben Sie eine Topologie $\mathcal{T}'$ auf X' so an, dass die abgeschlossenen Mengen in X gerade

$\emptyset, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, X$ sind.

$\mathcal{T}' = \{$

3.) Zeigen Sie, dass

$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \{u, v\}, \{u, v, w\}, \{v, w\} \}$

kein System abgeschlossener Mengen sein kann.

4.) Auf $X'' = \{3, +\}$ sind alle Topologien gerade alle Systeme abgeschlossener Mengen und umgekehrt.

$\mathcal{T}_1 =$

$\mathcal{A}_1 =$

$\mathcal{T}_2 =$

$\mathcal{A}_2 =$

$\mathcal{T}_3 =$

$\mathcal{A}_3 =$

$\mathcal{T}_4 =$

$\mathcal{A}_4 =$

5.) Auf $\mathbb{N}$ ist $\{A: A \text{ ist endlich}\} \cup \{\mathbb{N}\}$ keine Topologie, aber ein System abgeschlossener Mengen.

A16 Eigenschaften der Systeme abgeschlossener Mengen

(X, $\mathcal{T}$) sei ein top. Raum, $\mathcal{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Mengen in X.

$$B \in \mathcal{A} \iff X \setminus B \in \mathcal{T} \quad (1)$$

$$\text{Sei } \mathcal{C} \subset \mathcal{T}(X) \implies X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) \quad (2)$$

$$\text{und } X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) \quad (3)$$

Aus (1) schliesst man: $B \in \mathcal{A} \iff \dots\dots\dots (4)$

Aus den Eigenschaften einer Topologie leitet man die eines Systems offener Mengen ab:

$$(T1) \quad X \in \mathcal{T} \iff \dots\dots\dots (A1)$$

$$(T2) \quad \emptyset \in \mathcal{T} \iff \dots\dots\dots (A2)$$

$$(T3) \quad \mathcal{C} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \in \mathcal{T}$$

Daraus leitet sich (A3) ab:

$$\text{Sei } \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \implies \mathcal{C} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\} \dots\dots\dots$$

Mit (T3) und (3) folgt:

$$\dots\dots\dots (A3)$$

Analog ergibt sich (A4):

$$(T4) \quad A, B \in \mathcal{T} \implies A \cap B \in \mathcal{T}$$

$$\dots\dots\dots (A4)$$

Literatur

I Mathematische Grundlagen:

- (1) P.S. Alexandroff: Einführung in die Mengenlehre und
die Theorie der reellen Funktionen
Deutscher Verlag der Wissensch., Berlin 1967
- (2) B.H. Arnold: Elementare Topologie
Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1964
- (3) N. Bourbaki: General Topology Part 1
Hermann, Paris 1966
- (4) J. Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis
Vieweg, Braunschweig 1971
- (5) W. Franz: Topologie I
de Gruyter, Berlin 1968 (Sammlung Götschen)
- (6) K.P. Grotemeyer: Topologie
Bibliograph. Institut, Mannheim 1969
- (7) J.L. Kelley: General Topology
Toronto - New York - London 1965
- (8) D. Laugwitz/H. Vollrath: Schulmathematik vom höheren
Standpunkt I
Bibliograph. Institut, Mannheim 1969
- (9) R. Liedl: Mengentheoretische Topologie
in: Überblicke Mathematik 3
Bibliograph. Institut, Mannheim 1970
- (10) H. Meschkowski: Einführung in die moderne Mathematik
Bibliograph. Institut, Mannheim 1964
- (11) G. Papy: Mathématique moderne
Didier, Brüssel - Montreal - Paris 1967
- (12) E. Peschl: Funktionentheorie I
Bibliograph. Institut, Mannheim 1967
- (13) A.P. Robertson/W.J. Robertson: Topologische Vektorräume
Bibliograph. Institut, Mannheim 1967
- (14) E. Schubert: Topologie
Teubner, Stuttgart 1964

- (15) H.G. Steiner: Eine mathematische Theorie der Rangordnungen und Consensus-Rangordnungen
in: Mathematisch-Physikalische Semesterbericht (M.Ph.S.) Bd. VI Heft 1/2 S. 31 - 45
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1958

II Zur Didaktik der Topologie

- (16) H.G. Bigalke: Eine graphentheoretische Veranschaulichung des linearen Kontinuums
in: Der Mathematikunterricht (MU),
Jg. 20 Heft 4 S. 65 - 78
Klett, Stuttgart 1974
- (17) P. Baireuther: Die "zweidimensional entzerrte" Zahlengerade
in: Didaktik der Mathematik (DdM),
Jg. 4 Heft 2 S. 106 - 121
Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1976
- (18) P. Baireuther: Geometrie auf der Grundlage des Abstandsbegriffes
in: Pädagogische Welt, Jg. 30 Heft 4 S. 221-226
Auer, Donauwörth, 1976
- (19) A. Dold: Einfacher Beweis des Jordanschen Kurvensatzes unter zusätzlichen Voraussetzungen
in: M.Ph.S. Bd. XVII (1970) S. 23-32
- (20) J. Dzewas: Filter im Analysisunterricht
in: Der Mathematikunterricht an deutschen Universitäten und Schulen, S. 175-188
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1967
- (21) J. Dzewas: Topologische Strukturen im Analysisunterricht
in: MU Jg. 16 (1970) Heft 1 S. 74-79
- (22) H. Griesel: Von den Folgen zu den Filtern
in: M.Ph.S. Bd. VI (1958) Heft 1/2 S. 31-45
- (23) S. Herz: Einige Grundbegriffe der Topologie
in: Praxis der Mathematik 1965 S. 225 - 230
Aulis, Köln 1965

- (24) F. Jahner: Ein topologischer Weg zum Satz über die
Annahme der Grenzen bei stetigen Funktionen
in: MU Jg. 18 (1972) Heft 3 S. 27-41
- (25) U. Kahl: Analysis unter topologischen Gesichtspunkten
in: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche
Unterricht (MNU), Bd. 23 S. 83-92
Dümmler, Bonn/ Hirschgraben, Frankfurt 1970
- (26) H. Karcher: Analysis auf der Schule
in: DdM Jg. 1 (1973) Heft 1 S. 46-69
- (27) H. Kiesswetter: Der Satz von Heine-Borel
in: MU Jg. 18 (1972) Heft 3 S. 19-26
- (28) G. Papy: Topologie als Grundlage des Analysis-Unterrichts
Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1970
- (29) G. Papy: Die topologischen Räume im elementaren Analysis-
Unterricht
in: Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts
an den höheren Schulen, S. 83-124
Klett, Stuttgart 1969
- (30) F. Papy: Die ersten Begriffe der Topologie
ebenda, S. 72-82
- (31) G. Pickert: Aufbau der Analysis vom Stetigkeitsbegriff
her
in: MNU Bd. 21 (1968) Heft 11 S. 384-389
- (32) S. Seyfferth: Ein Vorschlag zur Milderung der Diskrepanz
zwischen naiv-anschaulichem Verständnis und
exakter Definition des Grenzwertes einer Funktion
in: DdM Jg. 3 (1975), Heft 4 S. 258-267
- (33) H.G. Steiner: "Unendlich" in Algebra und Analysis. Eine
Thematik der Kollegstufe
in: MU Jg. 19 (1973), Heft 4 S. 35-63.
- (36) H. Wäsche: Stetigkeit und Konvergenz
in: MU Jg. 18 (1972), Heft 3 S. 5-18
- (37) I. Weidig: Das Studium von Netzen
in: MU Jg. 18 (1972), Heft 3 S. 42-55

- (38) H. Wippermann: Über die Definition eines Stetigkeitsbegriffes mit Hilfe von Wurzelfunktionen
in: DdM Jg. 3 (1975), Heft 1 S. 29-35
- (39) P. Zahn: Ein Vorschlag zur Behandlung des Stetigkeitsbegriffes in der Schule
in: DdM Jg. 3 (1975), Heft 3 S. 185-193

III Zum Mathematikunterricht der Kollegstufe

- (40) J. Kratz: Der Mathematikunterricht in der Kollegstufe
Bayerischer Schulbuchverlag, München 1972
- (41) H. Meschkowski: Didaktik der Mathematik III
Klett, Stuttgart 1974

IV Zur Neugestaltung des Mathematikunterrichtes:

- (42) H. Freudenthal: Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?
in: MU Jg. 9 (1963) Heft 4 S. 5 - 29
- (43) K.P. Grottemeyer: Zum strukturellen Aufbau der Mathematik
in: MU Jg. 11 (1965) Heft 4 S. 73-93
- (44) V. Hole: Erfolgreicher Mathematikunterricht
Herder, Freiburg 1973
- (45) N. Knoche: Moderner Mathematikunterricht - eine Frage der Stoffauswahl?
in: M.Ph.S. Bd. XVIII (1971) S. 111-120
- (46) D. Laugwitz: Sinn und Grenzen der axiomatischen Methode
in: MU Jg. 12 (1966) Heft 3 S. 16-39
- (47) H. Lenné: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland
Klett, Stuttgart 1969
- (48) H. Lugowski: Strukturdenken in der Schulmathematik
in: Mathematik in der Schule, Jg. 9 (1971) S. 663-672
Verlag Volk und Wissen, Berlin 1971
- (49) H.G. Steiner: Menge, Struktur, Abbildung als Leitbegriffe für den modernen mathematischen Unterricht
in: MU Jg. 11 (1965) Heft 1 S. 5-19

- (50) H.G. Steiner: Mathematisierung und Axiomatisierung
einer politischen Struktur
in: MU Jg. 12 (1966) Heft 3 S. 66-86
- (51) E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts
Vieweg, Braunschweig 1974
- (52) E. Wittmann: Themenkreismethode und lokales Ordnen
in: MU Jg. 20 (1974) Heft 1 S. 5-18
- (53) H. Winter: Allgemeine Lernziele für den Mathematik=
unterricht?
in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik
Jahrgang 7, Heft 3, S. 106 - 116
Klett, Stuttgart 1975

Lebenslauf:

Geburtsdatum: 3. März 1948

Geburtsort: Schwäbisch Gmünd

Schulbildung: Grundschule und Gymnasium
in Schwäbisch Gmünd.
Abitur im Frühjahr 1966

Studium: Sommersemester 1966 bis
Sommersemester 1970:
Studium der Fächer Mathematik
und Physik für das höhere
Lehramt an Gymnasien
an der Universität München

Abschlußprüfungen: Herbst 1970:
Wissenschaftliche Prüfung für
das Lehramt an Gymnasien
an der Universität München

Berufliche Tätigkeiten: Vom 1.1.71 bis 31.3.74:
Assistent an der Pädagogischen
Hochschule Schwäbisch Gmünd.
Seit 1.4.74:
Dozent für Mathematik und ihre
Didaktik an der Pädagogischen
Hochschule Esslingen

Peter Baireuther

(Peter Baireuther)

